NOVA ALGEBRÆ ELEMENTA.

ELEMENTA
ALGEBRÆ
PRO NOVIS TYRONIBUS

tumultuario ſtudio

CONCINNATA,

AUCTORE

NICOLAO DE MARTINO

In Illuſtri Lyceo Neapolitano

MATHEMATUM PROFESSORE

TOMUS II.

Continens librum ſecundum de ſpecioſa problematum reſolutione.

NEAPOLI MDCCXXV.
Ex Typographia Felicis Moſca,
EXPENSIS BERNARDINI GESSARI
Superioribus annuentibus.

PRÆFATIO

Secundi Libri Epitomem exhibens.

Secundus noſtræ Algebræ Liber agit de problematum reſolutione ſpecioſâ, oſtenditque, qua ratione adhibito calculo litterali, ſuperiori libro explicato, problemata mathematica reſolvantur. Jam methodum, qua utitur Algebra in reſolutione problematum, viſum eſt primo loco ſummatim oſtendere. Quumque ea ſit ipſa Veterum Analyſis, alphabeti litteris adminiſtrata; quid interſit inter ſyntheſim, & analyſim, quave ratione veritates analyticè detectæ per ſyntheſim componantur, exemplis primùm declaratur. His prælibatis ſumma proponitur ar-

artificii analytici, in resolutione problematum à Recentioribus usurpati, quod quia ad quatuor potissimùm reducitur operationes, earum unaquæque sigillatim exponitur.

Itàque primum, quod fieri debet in resolutione alicujus problematis, est, ut clarè distinctèque percipiatur id, quod in ipso quæritur problemate. Clara ista cognitio obtinetur, perpendendo sedulò conditiones, in problemate appositas, utpote quæ relationem nobis ostendunt, quam ad datum, sive cognitum id, quod quæritur, debet habere. Ex hujusmodi conditionibus pendet etiam problematis determinatio: unde ritè sunt evolvendæ, ut innotescat quoque, num problema propositum sit rectè determinatum, nec ne. Plerumque enim problema est deficiens, nec omnes habet conditiones, ad determinationem ejus necessarias. Aliquando verò per contrarium est redundans, & plures habet conditiones, quàm quæ ad ejus determinationem requiruntur.

Hinc cum Proclo Euclidis Commentatore, & Johanne Pellio Mathematico Anglo tria problematum genera distinguimus, determinata, indeterminata, & plusquam determinata: quæ quidem qua ra-

ratione sint dignoscenda, ex eodem Pellio docemus. Est enim problema determinatum, quum numerus datorum, à se mutuò non dependentium, quæsitorum numerum adæquat. Est verò problema indeterminatum, quum idem numerus datorum minor est, quàm quæsitorum. Et denique problema est plusquam determinatum, quum data plura fuerint, quàm quæsita.

Alterum, quod in resolutione problematis fieri debet, est nomina quantitatibus omnibus imponere. Hæc denominatio debet esse primò distincta: unde aliis litteris designandæ sunt quantitates cognitæ, aliis incognitæ; quin etiam in eorum problematum resolutione, in quibus quātitates occurrunt diversæ speciei, juvat eas suis initialibus litteris designare, ut faciliùs possint à se mutuò distingui. Et secundò eadem denominatio debet esse compendiosa: quem in finem præstat, eam secundùm conditiones, in problemate appositas, facere. Sed ut liquidò Tyronibus constet immane quantùm afferat adjumenti distincta, & compendiosa quantitatum denominatio, exemplis ex Geometriâ petitis illud ostenditur.

Tertium porrò, quod fieri debet in reso-

ſolutione problematis, eſt æquationes invenire inter cognitas,& incognitas quantitates. Quum problema eſt determinatum, ſemper tot licebit æquationes invenire, quot occurrunt quantitates incognitæ. Inveniuntur enim æquationes per conditiones, appoſitas in problemate. Et ad determinandum ritè problema, tot oportet in eo conditiones apponantur, quot fuerint incognitæ quantitates. At verò, quum problema eſt indeterminatum, tunc nequaquam poterunt tot æquationes inveniri, quotus eſt numerus incognitarum. Et denique, ſi problema fuerit redundans, ſive pluſquam determinatum, invenientur multò plures æquationes, quàm occurrunt quantitates incognitæ.

Inventis in reſolutione problematis determinati tot æquationibus, quotus eſt numerus incognitarum; in id deinde incumbendum, ut ex omnibus iis æquationibus alia deducatur, quæ omnes problematis conditiones includens,unicam tantùm incognitam comprehendat. Hæc æquatio illa eſt, ad quam problema propr è reducitur. Sed quoniam ea non ſemper eſt apta ſolvendæ propoſitæ quæſtioni: proinde ultimum, quod fieri debet in reſo-

ſolutione problematis, eſt æquationem illam principalem ad ſimpliciorem expreſſionem ſubinde reducere, ut quantitates cognitæ ab incognitâ, quantùm fieri poteſt, ſeparatæ reperiantur; eandemque ita deinde reſolvere, ut valor incognitæ per ſolas quantitates cognitas expreſſus oriatur.

Æquationum legitima reductio obtinetur notiſſimis quatuor operationibus, additione, ſubtractione, multiplicatione, & diviſione. Sed interdum adhibenda eſt quoque formatio poteſtatum, ſcilicet, quum in æquatione quantitates radicales occurrunt. Quin etiam ſi contingat, omnino notum eſſe quicquid in uno æquationis membro continetur, & in altero reperiri perfectam aliquam poteſtatem, tunc per radicum extractionem æquatio reducetur. Reſolutio autem æquationum paulò difficilior deprehenditur, nec tam facilè, quemadmodum reductio, poteſt obtineri: unde indicato tantùm, qua ratione æquationes ſecundi gradus reſolvantur; deinceps materiam iſtam ex integro tractandam nobis proponimus.

Expoſitâ ſummatim methodo, qua utitur Algebra in reſolutione problematum,

eadem deinde exemplis certo consilio electis in Tyronum gratiam illustratur. Afferuntur autem primo loco problemata nonnulla arithmetica, quæ scilicet circa numeros, sive quantitates abstractas occupantur. Sunt quippe hujuscemodi problemata solutu valde facilia, eaque proinde Tyronibus primo loco proponẽda. Neque enim aliud in horum problematum resolutione fieri debet, quàm conditiones, in iis appositas, algebraicis terminis designare. Nam eo ipso, quo id efficitur, illicò tot habentur æquationes, quot occurrunt quantitates incognitæ: adeo, ut si aliquid sit difficultatis in resolutione horum problematum, ea tota in inveniendâ problematis æquatione principali, eademque legitimè reducendâ potissimum sita sit.

Problemata arithmetica excipiunt problemata, alia, ex Geometriâ deprompta. Horum resolutio est paulò difficilioris indaginis. Quæ enim in iis quæruntur, pendent ut plurimum ex figurarum proprietatibus: proindeque, quò possit Analysta problemata geometrica ad algebraicos terminos deducere, necesse est, ut figurarũ geometricarum proprietates, & accidentia perspecta habeat, ac explorata. Debet

etiam

etiam Trigonometriam, Datorumque Doctrinam non ignorare. Nam contingit sæpe sæpiùs, ut in calculo peragendo non ea, quæ propriè data sunt, sed quæ ex iis consequuntur, debeant adhiberi.

Inter problemata geometrica extat & illud de inveniendâ diagonali alterâ parallelogrammi ex datis lateribus, & diagonali unâ: unde subortum nobis theorema illud, Pythagoreo longè universaliùs, quod in omni parallegrammo quadrata laterum omnium æqualia sint quadratis diagonalium. Extat etiam problema de inveniendâ diagonali alterâ quadrilateri, circulo inscripti, ex datis similiter lateribus, & diagonali unâ: unde deduximus celebre illud Ptolomæi theorema, quod in quadrilateris, circulo inscriptis, rectangulum sub diagonalibus adæquet summam eorum, quæ fiunt ex lateribus oppositis. Et denique affertur problema Pappi Alexandrini de producendo latere quadrati, nulli non cognito, cujus resolutio omnibus huc usque traditis rationibus docetur.

Post problemata geometrica, sequuntur problemata nonnulla physico-mathematica, quæ eo fine attulimus, ut intelligant Tyrones, qua ratione physico-ma-

thematicæ disciplinæ possint etiam calculi algebraici legibus submitti. Horum priora duo exhibent leges, observandas in congressu corporum, juxtà sanioris Physices principia. Tertium est problema ludi trudicularis, cujus tres casus expenduntur. Quartum specimen præbet totius ferè Artis Ballisticæ. Et quintum, sive postremum est problema Torricellii de definiendâ figurâ vasis, ita ut fluidum, erumpens per foramen, factum in fundo ejus, æqualibus temporibus æqualiter quoque deprimatur; cujus solutionem exhibuit primus omnium Dominus Mariotte in suo de Aquarum motibus tractatu, gallicè scripto.

His omnibus exemplis abundè, opinor, illustratur methodus, qua utitur Algebra in resolutione problematum: proindeque plura alia congerere, superfluum duxi. Quia ergo unicum medium, quod adhibet Algebra ad problemata quæcumque resolvenda, est æquationum artificium; harum naturam, & affectiones explicandas aggredior: qua in re tria præmittuntur; primum, qua ratione æquationes dividantur in gradus, & considerentur velut congeries quantitatum, quæ simul zero, sive nihilum adæquent;

al-

alterum, quo pacto ordinari debeant æquationis termini, & à se mutuò distingui; ac tertium, quo artificio cujusque gradus æquationes ad formulas quasdam generales possint revocari.

Quoniam autem in omnibus æquationibus illud sedulò debet observari, ut termini omnes sint homogenei; de homogeneitate istâ terminorum deinde differitur. Hanc in æquationibus numericis considerari semper posse, exinde deducitur, quod in omni numero tot semper dimensiones, quot libuerit, liceat distinguere. Eandem reperiri etiam in æquationibus litteralibus, quum nomina quantitatibus imponũtur secundum propriam ipsarum naturam, exemplo ex Geometriâ petito demonstratur. Unde conficitur, tunc demum terminos æquationis non esse homogeneos, quum æquatio est litteralis, & nomina quantitatibus secundùm propriam ipsarum naturam nequaquam sunt imposita.

Sed consideratâ inter quantitates, quæ litteris designantur, unitate, eadem omnino ratione, qua inter quantitates numeris expressas consideratur; ostenditur qua ratione, quum termini æquationis nequaquam sunt homogenei, possint uni-

unitatis illius beneficio velut homogenei considerari. Cui illud etiam subjungitur, tamquam ab eo, quod agitur, non omnino alienum, quo pacto quantitates omnes velut lineæ omninò simplices concipi queant, licèt plures dimensiones habere videantur; quove item artificio, invectâ in Geometriam unitate, liceat multiplicationem, divisionem, & radicum extractionem perinde lineis perficere, ac numeris fieri solet.

Jam adhibitâ unitate productum, quod oritur ex multiplicatione duarum linearum, erit non rectangulum, ut docet Euclides in Elementis, sed linea altera simplex. Unde ne in id Tyrones impingant, ad rem visum est, advertere productum illud nec lineam esse, nec rectangulum, sed dumtaxat utroque modo posse designari. Quod equidem dum clariùs ostenditur, verus usus, quem præstat unitas in Geometriâ, aperitur, nempe quod beneficio ejus rationes, quæ ex duabus, aut pluribus componuntur, ad simplices revocentur. Unde colligimus, quod etsi unitatis artificium in Geometriâ non adhibuerint Veteres, ipsum tamen usum unitatis aliâ ratione, & fortasse præstantiori, fuerint consequuti.

Ex

Ex homogeneitate, in terminis cujusque æquationis observandâ, progredimur recto tramite ad radices æquationum, earundemque multiplices species explicandas. Radicem æquationis vocamus valorem, quem in eâ habet incognita. Unde considerando æquationes, velut congeries quantitatum, quæ simul zero, sive nihilum adæquent, deducimus radicem æquationis talem esse debere, ut si loco incognitæ scribatur, ejus conditiones adimpleat, faciendo, ut æquationis termini omnes contrarietate signorum evanescant. Ostenditur autem exemplis, omnem æquationem, quum plures habet dimensiones, plures item radices admittere. Cujus rei ratio subnectitur, nempe quia interdum problemata, etsi determinata, pluribus modis solvi possunt: proindeque, ut iis per singulos casus satisfieri queat, invenitur in cujusque resolutione æquatio talis, quæ tot radices admittet, quot modis problema solvi poterit.

Circa species radicum æquationis, affertur primò divisio illarum in positivas, & negativas. Huic subnectitur divisio altera in reales, & imaginarias; quæ quidem omnes radicum species exemplis ostendere

stenduntur. Qua autem ratione fiat, ut non omnes æquationis radices sint reales, nec omnes positivæ, ibidem explicatur, ostenditurque radices negativas indicare nobis problema non esse rite conceptum, sed debere paulò aliter enunciari; radices autem imaginarias indicio nobis esse, problema in iis, in quibus proponitur, terminis contradictionem aliquam involvere, atque adeo moderandum esse aliquo modo, quò capax fiat solutionis.

Ad hæc docetur constitutio æquationum, quarum plures sunt dimensiones, & consequenter plures radices, & ostenditur exemplis æquationes istas oriri per multiplicationem mutuam æquationum simplicium, quæ ipsarum radices comprehendunt; id quod primus omnium docuit Harriotus. Hinc verò deducimus, æquationem omnem, quæ plures radices admittit, dividi semper posse per binomium, compositum ex incognitâ minùs valore unius ex radicibus positivis, vel ex incognitâ plus valore unius ex radicibus negativis; quod equidem quum fit, dimensiones æquationis minuuntur, ipsaque æquatio ad gradum deprimitur inferiorem.

Vicissim autem ostendimus, quod si æqua-

æquatio aliqua dividi possit per binomium, constans ex incognitâ plus, vel minus alterâ quantitate cognitâ, quantitas ista cognita sit una ex radicibus æquationis; secus verò, si divisio fieri nequeat. Unde colligimus, quod num aliqua quantitas sit radix alicujus æquationis, nec ne, cognosci possit, non modò ope substitutionis, nimirum inquirendo, num substitutâ quantitate illâ loco incognitæ, ejus conditiones adimpleat, faciendo, ut æquationis termini omnes evanescant; verùm etiam ope divisionis, scilicet dividendo æquationem propositam per binomium, constans incognitâ plus, vel minus datâ illâ quantitate.

Ex traditâ constitutione æquationum, quæ plures habent dimensiones, illud etiam ostendimus, æquationem omnem tot radices habere posse, quot sunt dimensiones ejus, & non plures. Sed qua ratione cognosci possit, quot ex iis radicibus sint positivæ, & quot negativæ, quum omnes sunt reales, regulâ à Cartesio traditâ docetur, quæ etiam extenditur ad æquationes, in quibus unus ex terminis intermediis deficit. Atque hìc etiam explicatur, quo pacto fieri possit, ut in unâ, eademque æquatione radices

omnes

omnes, quæ negativæ erant, evadant positivæ, & ut eadem operâ omnes illæ, quæ positivæ erant, fiant negativæ.

Porrò etsi radices imaginariæ casus problematis impossibiles nobis ostendant, neque adeo, quum occurrunt, ulla earum ratio haberi debeat; earum tamen natura Analystis ignota esse non debet. Hunc in finem ostendimus, radices istas in æquationibus occurrere semper in numero pari; atq; adeo æquationes illas, quæ sunt tertii, quinti, septimi, aut alterius cujusque imparis gradus, unam ad minimum radicem realem habere; nec proinde omnino impossibilia esse posse problemata, ad quæ æquationes illæ referuntur; quum iis fieri possit satis saltem per radicem illam realem, quam illæ æquationes admittunt.

Ostendimus quoque radices imaginarias posse esse duplicis speciei, nimirum vel puras, vel mixtas. Quumque contradictio radicum imaginariarum in æquationibus non appareat, deducimus hinc, quod sicuti ex duabus radicibus alicujus æquationis nequit esse una realis, & altera imaginaria, sed debent vel ambæ esse reales, vel ambæ imaginariæ; ita quoque ex duabus alicujus æquationis radici-

bus

bus imaginariis nequeat esse una pura, & altera mixta, sed debeant vel ambæ esse puræ, vel ambæ mixtæ; quum aliter contradictio non evanesceret. Atque ex eodem principio colligimus quoque, quod sicuti quum utraque radicum imaginariarum est pura, communis utrique debet esse quantitas imaginaria, sed contrariis signis affecta; ita quoque quum ambæ radices sunt mixtæ, communis esse debeat tam quantitas imaginaria, quàm quantitas realis, sed ista eodem signo, illa verò signis contrariis designata.

Hinc verò consequens fit, æquationis secundi gradus, cujus duæ radices sunt imaginariæ, ultimum terminum oportere esse semper affectum signo positivo; atque adeo in iis æquationibus secundi gradus, in quibus ultimus terminus reperitur affectus signo negativo, radices duas nequaquam posse esse imaginarias. Sed ne aliquis existimet, generaliter imaginarias esse radices duas illius æquationis secundi gradus, cujus ultimus terminus afficitur signo positivo; ad rem visum est advertere, id dumtaxat locum habere in iis æquationibus, in quibus ultimus terminus reperitur quidem affectus signo positivo, sed est major quadrato, quod

fit

fit ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ.

Etsi autem radices alicujus æquationis non adhuc nobis innotescant, nihil tamen vetat, quominus æquatio ipsa in aliam transformetur, cujus radices habeant datam quandam relationem cum radicibus prioris. Hujusmodi æquationū transformatio, quæ multifariam fieri potest, varios nobis suppetit usus, tum ad præparandas, ac reducendas, cum item ad resolvendas æquationes: unde de multiplici istâ æquationum transformatione tractatio suscipitur. Primò itaque explicantur transformationes æquationum, quæ fiunt additione, & subtractione; tum eæ afferuntur, quæ fiunt multiplicatione, & divisione; ac denique alii æquationes trasformandi modi, Algebristis non ita familiares, breviter indicantur.

Igitur additione, & subtractione transformantur æquationes, quum radices ipsarum datâ aliquâ quantitate augentur, vel minuuntur. Ostenditur autem, quod augendo radices æquationis, positivæ quidem augeantur, negativæ verò minuantur. Et vicissim, quod minuendo radices æquationis, positivæ quidem minuantur, negativæ verò augeantur. Nec silentio

præ-

prætermus, quod augendo radices æquationis, una ex radicibus negativis possit prorsus evanescere, aut etiam ex negativâ fieri positiva; & vicissim, quod minuendo radices æquationis, una ex radicibus positivis possit in nihilum abire, aut etiam ex positivâ fieri negativa. Atque hac arreptâ occasione, modum indicamus inquirendi, intra quem terminum consistant radices, tum positivæ, cùm negativæ alicujus æquationis.

His subjungimus usum harum transformationum, nimirum quod ipsarum ope tolli semper possit secundus terminus ex omni æquatione: id, quod inseruit, tum quia sublato secundo termino omnes alicujus gradus æquationes ad pauciorem numerum reducuntur, tum etiam quia resolutio æquationum secundi gradus, tollendo ex iis terminum secundum, nullo negotio obtinetur. Interim illa regula, per quam tollitur secundus terminus, multum abest, ut pro tollendis terminis aliis possit nobis usui esse. Unde, ne si id fortè fieri contingat, hæreat Analysta, ostendimus qua ratione tolli possit per analysim quisq; terminus ex quacũq; æquatione propositâ; & generaliter notamus ad id obtinendũ resolvendã semper

esse æquationem talem, ut gradum ejus ostendat locus ipse, quem occupat in æquatione tollendus terminus, si unitate unâ minuatur: adeò, ut pro tollendo ultimo termino ex datâ quacumque æquatione, resolvi debeat æquatio, quæ sit ejusdem gradus cum æquatione propositâ, quæque etiam ab ipsâ non differet.

Multiplicatione, & divisione transformantur æquationes; quum ipsarum radices per datam aliquam quantitatem multiplicantur, vel dividuntur. Id autem facili negotio fieri posse ostendimus, si termini ipsius æquationis multiplicentur, vel dividantur per terminos progressionis geometricæ, quæ incipit ab unitate, & pro exponente habet datam quantitatem, Quid porrò præstent hujusmodi transformationes, deinceps explicatur; doceturque usui nobis esse posse ad tollendas fractiones, & quandoque etiam radicales quantitates ab ipsis æquationibus; item ad reddendam quantitatem cognitam alicujus termini æqualem datæ cuidam quantitati, quod ostenditur fieri etiam posse ope earum transformationum, quæ additione, & subtractione peraguntur; ac denique ad minuendas quantitates cognitas, quæ in æquationum termi-

minis singulis occurrunt, id quod in examinandis æquationibus valde conducit.

His quatuor æquationes transformandi modis tres alii subjiciuntur, quorum prior est, quum æquationes mutantur in alias, quarum radices sint quotientes, qui oriuntur, dividendo datam aliquam quantitatem per radices illarum. Ope hujus transformationis radices æquationis convertuntur in alias, quæ reciprocam ipsarum servant rationem, adeoque maxima convertitur in minimam, & vicissim minima in maximam; notaturque quod si loco datæ quantitatis unitas capiatur, radices æquationis in earum inversas mutentur. Ejusdem transformationis ope potest etiam ex omni æquatione penultimus terminus tolli, si modò priùs tollatur secundus. Et eodem modo poteris etiam antepenultimum tollere, si modò tertium priùs tollas.

Alter æquationes transformandi modus est, quum æquationes mutantur in alias, quarum radices sint residua, quæ oriuntur, subtrahendo ex datâ quantitate radices illarum. Hic modus transformandi æquationes usui nobis esse potest ad tollendum ex iis secundum terminum, quotiescumque afficitur signo negativo.

Idem inseruit quoque, quum radices omnes æquationis requiruntur positivæ, & una simul coefficiens alicujus termini major esse debet datâ aliquâ quantitate. Sed si æquationis radices omnes requirantur quidem positivæ, at coefficiens unius ex terminis ejus non major, sed æqualis esse debeat alicui datæ quantitati; tunc non semper id poterit obtineri. Ac denique eodem transformandi modo illud quoque præstari potest, quod requirebat Cartesius pro construendis æquationibus sex dimensionum, nimirum ut data æquatio mutetur in aliam, in qua radices omnes sint positivæ, & unâ simul coefficiens termini tertii major sit quadrato, quod fit ex coefficiente secundi termini dimidiato.

Tandem ultimus æquationes transformandi modus est ille, qui fit subrogando incognitam aliam in locum quadrati, cubi, aut cujuslibet alterius potestatis incognitæ, in æquatione contentæ. Quod quidem quum fit, non modò minuuntur æquationum dimensiones, verùm etiam æquationes ipsæ mutantur in alias, quarum radices habent rationem duplicatam, triplicatam, &c. ad radices illarum. Possunt etiam æquationes transformari,

mu-

mutando eas in alias, quarum radices habeant vicissim rationem subduplicatam, subtriplicatam, &c. ad radices illarum. Sed id efficitur, si vicissim loco incognitæ in æquatione contentæ, ponatur quadratum, cubus, &c. alterius cujuslibet incognitæ; adeò, ut hac ratione non quidem minuantur, sed augeantur æquationum dimensiones.

Quum de gradibus æquationum actum est, diximus æquationes dividi in gradus ratione maximæ potestatis, ad quam ascendit in iis quantitas incognita. Sed ibidem notavimus quoque æquationem aliquam tunc demum dicendam esse illius gradus, quem ostendit maxima incognitæ potestas, quum ad gradum inferiorem deprimi non potest; nam si fortè contingat eam deprimi posse, tunc propria ejus sedes erit in gradu illo, ad quem utique deprimitur: quod quidem notare oportebat, ne problemata, unde derivantur æquationes, contra propriam naturam, generis altioris dijudicentur. Itaque ad rem visum est, priusquam de resolutione æquationum ageretur, regulas tradere, quibus instructus Analysta æquationes, in propriâ sede non existentes, deprimere possit, & ad propriam sedem illas revocare.

 Vul-

Vulgus Algebristarum eas æquationes docet esse in propriâ sede, quæ in alias simpliciores dividi non possunt. Sed quia omnis æquatio dividi saltem potest in æquationes simplices, quæ suas continent radices; placuit rem aliter definire, nempe ut eæ tantùm æquationes in propriâ suâ sede existant, quæ non modò per multiplicationem mutuam æquationum simplicium, in quibus earum radices continentur, verùm etiam per unicam tantùm illarum æquationum constitui possunt. Unde discimus, æquationes tunc demum in propriâ suâ sede non existere, quum vel omnes ipsarum radices sunt rationales; vel partim rationales, partim radicales; vel denique quum omnes sunt radicales, sed sedes incommensurabilitatis nequaquam reperitur in illo gradu, ad quem attollitur in æquatione quantitas incognita.

Atque hinc, vocando simplices eas tantùm æquationes, in quibus incognita non modò est unius dimensionis, sed insuper valorem habet rationalem, deducimus æquationes in propriâ suâ sede non existentes tripliciter componi posse. Omnibus enim id accidit, ut non aliter constitui queant, quàm per multiplicatio-

tio-

tionem mutuam aliarum inferioris gradus æquationum. Sed æquationum componentium, vel unaquæque simplex esse potest, vel nulla gaudet hac simplicitate, vel denique ex iis aliquæ simplices esse possunt, aliquæ non item. Unde in tradendã æquationum ad propriam sedem reductione primò casum consideramus, quum inter æquationes componentes reperitur aliqua simplex; tum alium expendimus, ubi nulla æquationum componentium hac gaudet simplicitate: id, quod in iis tantùm æquationibus contingere potest, quæ plures, quàm tres, dimensiones habent.

Pro reducendis æquationibus compositis, in quibus una, aut plures ex componentibus sunt simplices, noscenda prius est ratio, qua terminorum cujuscumque æquationis coefficientes constituuntur. Hanc itaque docentes, exemplis ostendimus coefficientem secundi termini esse summam radicum sub signo contrario, coefficientem termini tertii esse summam productorum ex singulis binis sub signo proprio, coefficientem termini quarti esse summam productorum ex singulis ternis sub signo mutato, atque ita deinceps: quam utique

constitutionem primus omnium Cartesius observavit. Unde, quum in secundo termino cujuscumque æquationis existat summa radicum sub signo mutato; deducimus, quod quotiescumque ex aliqua æquatione deficit secundus terminus, tunc summa radicum positivarum æqualis esse debeat summæ ex radicibus negativis.

Jacobus Ozanam, Mathematicus Parisiensis, in suis Algebræ Elementis conatus est problemata æquationum constitutiva, ex quorum nempe resolutione æquationes illæ orirentur, determinare, fortè ne crederent Tyrones, æquationes ad libitum sumptas fictitias esse, & ad nullum problema posse referri. Sed docuit per ambages id, quod unicâ, & simplicissimâ viâ tradi poterat. Itaque ex cognitâ ratione, qua constituuntur coefficientes terminorum cujuscumque æquationis, methodum generalem indicamus, qua mediante determinari possint problemata æquationum constitutiva, & exemplis ostendimus, sic rem concipiendam esse, ut pro unaquaque æquatione inveniendæ sint tot quantitates, quot sunt dimensiones ejus, sed ita tamen, ut data sit non modò summa ipsarum, verùm etiam summa productorum ex singulis binis, summa

ma productorum ex ſingulis ternis, atque ita deinceps.

Eodem in loco docemus etiam, qua ratione in omni æquatione, etſi radices ejus adhuc nos lateant, determinari poſſit ſumma quadratorum, cuborum, aliarumque altioris ordinis poteſtatum, quæ ex iiſdem radicibus fiunt. Id primus, quem ſciam, tradidit Vir ſummus Iſaac Newtonus in Arithmeticâ ſuâ univerſali: unde limites collegit, intra quos continentur radices tum poſitivæ, cùm negativæ cujuſque æquationis. Nam quum radicum omnium quadrata ſint poſitiva, erit item poſitiva ſumma quadratorum, ideoque quadrato maximæ radicis major. Et eodem argumento ſumma quadrato-quadratorum radicum omnium major erit, quàm quadrato-quadratum radicis maximæ; & ſumma cubo-cuborum major, quàm cubo-cubus maximæ radicis. Quocirca ſi limitem deſideres, quem radices nullæ tranſgrediantur, quære ſummam quadratorum ex radicibus omnibus, & extrahe ejus radicem quadratam, quæ quum ſit major maximâ radice æquationis, limitem dabit optatum. Sed ad radicem maximam propiùs accedes, ſi quæras ſummam quadrato-quadratorum, &

ex-

extrahas ejus radicem quadrato-quadratam; & adhuc magis, si quæras summam cubo-cuborum, & extrahas ejus radicem cubo-cubicam; atque ita deinceps.

Cognitâ ratione, qua constituuntur coefficientes terminorum cujusque æquationis, facile nobis fuit methodum excogitare, pro reducendis æquationibus compositis, in quibus aliquæ ex componentibus sunt simplices. Nam, quum inter æquationes componentes una, aut plures sunt simplices; æquatio ipsa composita necessariò unam, aut plures habere debet radices rationales: proindeque eò res redit, ut qua ratione radices istæ rationales erui possint, ostendatur. Unde, quia in ultimo termino cujuscumque æquationis reperitur id, quod ex continuâ radicum omnium multiplicatione producitur; eruentur radices rationales, si quæ sint, ex quacumque æquatione, si utique quantitatis in ultimo termino existentis divisores omnes capiantur, & inquiratur; quinam ex iis substituti in æquatione incognitæ loco, conditiones ejus adimpleant, faciendo, ut æquationis termini omnes contrarietate signorum evanescant; in quo quidem scrutinio peragendo substituendi sunt divisores tum signo

po-

positivo, cùm signo negativo; nam fieri potest, ut qui divisor non sit radix positiva alicujus æquationis, idem sit radix negativa.

Hæc methodus eruendi radices rationales ex æquationibus, ope divisorum quantitatis cognitæ, quæ existit in ultimo termino, duplici ex capite displicet nonnullis; primò quia non ita facile est, omnes alicujus quantitatis divisores invenire; & secundò, quia quum permulti sunt divisores, omnes tentare, tædium affert. Itaque, ut his difficultatibus occurratur, non modò methodus traditur satis expedita pro inveniendis datæ alicujus quantitatis divisoribus omnibus; verùm etiam cautiones nonnullæ indicantur pro minuendo labore substitutionis. Hujusmodi cautiones sunt quatuor. Prima, tentando, num minui possint termini æquationis, ope illius transformationis, quæ divisione peragitur; quum sic minuatur quoque numerus divisorum. Secunda, inveniendo limites, intra quos continentur radices tum positivæ, cùm negativæ; quum divisores, qui eos limites transgrediuntur, tutò negligi possint. Tertia, rejiciendo etiam divisores, qui excedunt coefficientem secundi termini, quotiescum-

cumque radices æquationis, vel omnes sunt positivæ, vel omnes negativæ. Et quarta demum in æquationibus litteralibus negligendo quoque divisores duarum, aut plurium dimensionum, quum termini omnes sunt homogenei, & æquatio nequit transformari, ponendo incognitam aliam loco quadrati, cubi, aut alterius potestatis incognitæ, in æquatione contentæ.

Alter casus, qui considerari debet, in reductione æquationum ad propriam sedem, est, quum nulla ex æquationibus componentibus est simplex. Casus iste in æquationibus secundi, & tertii gradus locum habere nequit. Itaque dumtaxat contingere potest in æquationibus, quæ plures habent dimensiones, quàm tres. Primò igitur rei periculum facimus in æquationibus quarti gradus. Et quoniam æquationes istæ, quum in propriâ sede non consistunt, nec tamen ad earum constitutionem ulla concurrit æquatio simplex, non aliter componi possunt, quàm per multiplicationem duarum secundi gradus æquationum; visum est, in æquationibus quarti gradus tres casus subdistinguere. Primus est, quum utraque æquationum componentium secundo termi-

mi-

mino caret. Alter, quum una caret secundo termino, alia illum admittit. Et tertius, sive postremus, quum in utraque ex æquationibus componentibus secundus terminus reperitur. Pro singulis istis casibus regulæ totidem ad praxim satis faciles, ac expeditæ traduntur. Sed earum ultima pro omnibus usui nobis esse potest; quum casus, ad quem refertur, generalitate suâ, alios quoque duos comprehendat.

Quoniam autem hæc regula ad æquationes altioris gradus nequaquam potest promoveri; proinde pro reducendis æquationibus quarti gradus, quum per duarum secundi gradus multiplicationem componuntur, visum est aliam methodum proponere, quæ generalis est, & ad omnes cujuscumque gradus æquationes potest applicari. Hæc methodus procedit, assumendo æquationes duas componentes indeterminatè, & conferendo cum æquatione propositâ eam, quæ oritur ex illarum multiplicatione; quum per mutuam istam collationem facile sit æquationum componentium utramque determinare. Itaque alterius hujus methodi periculum fit primò in ipsis æquationibus quarti gradus, tum ad æquatio-

nes

nes quinti, & sexti gradus eadem applicatur. Sed in proponendis exemplis pro reductione æquationum quarti gradus, novimus; qua ratione exprimat analysis quantitates illas, quæ plures valores habere possunt, nimirum per quotientem, qui oritur, dividendo zero per zero.

Atque hæc quidem quantitatum indeterminatarum expressio sponte suâ consequitur ex iis, quæ de naturâ, & calculo infinitesimarum priori libro exposuimus. Demonstravimus enim infinitesimarum, hoc est quantitatum indefinitè parvarum, varia genera posse considerari, sed zero esse velut infinitesimam ultimi generis, quum sit ultimus terminus, ad quem quantitates decrescendo possint perveniri. Itaque, quum ibidem ostensum sit generaliter, quotientem, qui oritur, dividendo per se mutuò duas ejusdem generis infinitesimas, quantitatem esse finitam; erit etiam quantitas finita quotiens, qui oritur, dividendo zero per zero: proindeque quia quotiens iste nullum habet valorem certum, ac determinatum; erit indeterminata, quantitas finita ab ipso designata, adeoque pluribus valoribus poterit explicari.

Æquationes, quæ duas, aut plures radi-

dices æquales habent, nequaquam existunt in propriâ suâ sede, sed semper ad gradum alterum inferiorem deprimi queunt: quod quidem verum est, non modò si radices illæ æquales sint commensurabiles, ac rationales, verùm etiam si fuerint incommensurabiles, ac radicales. Reductio istarum æquationum potest iisdem fermè regulis perfici, quibus aliarum æquationum reductio instituitur. Sed placuit, hujusmodi æquationes speciatim considerare, quia nempe per vias longè faciliores ad propriam suam deprimi possunt. Exhibemus itaque pro reducendis hisce æquationibus duplicem methodum, quarum utraque in eo consistit, ut una ex radicibus æqualibus inveniatur; nam eâ inventâ, solius divisionis ope ad propriam suam sedem æquatio deprimetur.

Prima methodus est illa, quam tradidit Cartesius in suâ Geometria, dum tangentes curvarum docuit determinare. Hæc methodus ita se habet. Assumantur indeterminatè tot radices æquales, quot æquatio proposita supponitur habere. Tum ex iis constituatur æquatio, quæ pauciores quidem dimensiones, quàm proposita, habere potest, plures autem

ha-

habere non poteſt. Jam ſi æquatio iſta non habeat tot dimenſiones, quot adſunt in propoſitâ, multiplicetur ea per aliam æquationem, tot, quot ei deſunt, dimenſiones habentem. Sic enim habebitur æquatio, in qua tot erunt dimenſiones, quot propoſita complectitur. Comparentur porrò termini unius æquationis cum terminis alterius, & iſtius comparationis ope habebuntur totidem æquationes, quarum unaquæque unam ex radicibus æqualibus propoſitæ æquationis continebit.

Quum æquationes propoſitæ tot habent radices æquales, quot ſunt dimenſiones ipſarum; eruentur ex iis per comparationem illam tales æquationes, ut nullo negotio reſolvi poſſint; quippe quæ ſemper erunt puræ, hoc eſt primum tantùm, & ultimum terminum habebunt. Sed quum æquationes propoſitæ nequaquam continent tot radices æquales; tunc æquationes, quæ ex iis eruuntur, prodeunt affectæ; proindeque quæ difficultas vitanda eſt pro reducendis æquationibus propoſitis regulis antea traditis, eadem in reſolvendis aliis illis æquationibus occurrit. Itaque, ut huic difficultati occurramus, methodum proponimus

val-

valde facilem, ac expeditam pro inveniendâ unâ ex radicibus æqualibus, quæ in singulis illis æquationibus continetur, scilicet quærendo communem divisorem duarum quarumvis illarum æquationum.

Altera methodus pro reducendis æquationibus, in quibus duæ, aut plures radices æquales continentur, est Johannis Huddenii, eaque pendet ex hoc theoremate, quod si termini alicujus æquationis, duas, pluresve radices æquales habentis, multiplicentur ordine per terminos alicujus progressionis arithmeticæ, altera oriatur æquatio, in qua, unâ demptâ, eædem erunt radices æquales. Itaque, quia omnis æquatio, quæ plures habet radices æquales, in aliam converti potest, in qua contineantur eædem radices æquales, unâ demptâ, si utique omnes ejus termini multiplicentur ordine per terminos alicujus progressionis arithmeticæ; per diversas hujusmodi multiplicationes talis semper haberi poterit æquatio, ut unam tantùm contineat radicum æqualium. Quocirca, si hujus, & æquationis propositæ communis divisor capiatur, ille dabit radicem æqualem optatam.

Explicatâ reductione æquationum, quæ

quæ in propriâ ſuâ ſede non exiſtunt, progredimur tandem ad reſolutionem æquationum, in propriâ ſuâ ſede exiſtentium. Hujuſmodi reſolutio eſt totius artificii analytici coronis, ac complementum. Parum enim refert, in reſolutione alicujus problematis æquationem inveniſſe, quæ ſingulas problematis condiciones includens, unicam tantùm incognitam comprehendat. Neque etiam juvat multum, æquationem iſtam, ſi fuerit compoſita, in ſuas componentes reſolviſſe, eandemque ad propriam ſuam ſedem revocaſſe: ſi deinde regulæ non habeantur, quibus inſtructus poſſit Analyſta æquationem, in propriâ ſuâ ſede exiſtentem, ſubinde reſolvere, ut ope ejus reſolutionis ſingulos incognitæ valores valeat eruere. Nam problema, quod proponitur, tunc dicitur reſolutum, quum ſinguli valores magnitudinis, quæ principaliter quæritur in illo problemate, non ignorantur.

Itaque, quia æquationes, quum ſimplices prodeunt, nullâ egent reſolutione, eas primùm æquationes reſolvendas nobis proponimus, quarum ſedes in ſecundo gradu reperitur. Iſtæ, quum puræ ſunt, reſolvuntur nullo negotio, per ſolam quadratæ radicis extractionem. Sed ſi fue-

si fuerint affectæ, propter ipsam affectionem, non erunt ita faciles resolutu. Interim pro iis resolvendis quatuor diversas rationes exhibemus; quarum prima procedit, tollendo ex iis secundum terminum, atque adeo delendo affectionem, quæ in illis occurrit. Secunda, addendo ad utramque partem æquationis quadratum, quod fit ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ, ut una pars quadratum evadat perfectum. Tertia, assumendo radices propositæ æquationis indeterminatè, & ex iis novam æquationem constituendo. Ac quarta demum, assumendo indeterminatè, tum summam radicum, cùm earundem differentiam.

Æquationes secundi gradus affectæ, pro diversitate signorum, quibus termini ipsarum affici queunt, ad quatuor formulas possunt revocari. Itaque Tyronum utilitati consulentes, quatuor illas diversas resolvendi rationes singulis iis formulis applicamus. Ostendimus autem, quod quum ultimus æquationis terminus afficitur signo negativo, tunc radices æquationis semper sint reales; sed non item, si ultimus terminus æquationis afficiatur signo positivo; quum in hoc casu, si contingat ultimum terminum majorem esse

quadrato, quod fit ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ, radices duæ æquationis prodeant imaginariæ. Itaque in æquationibus secundi gradus, quotiescumque ultimus terminus afficitur signo positivo, tunc demum radices duæ reales erunt, quum ultimus terminus non est major quadrato, quod fit ex semisse coefficientis secundi termini. Nec silentio præterimus, quod si idem ultimus terminus prædicto quadrato fuerit æqualis, radices duæ reales erunt, & æquales.

Resolutioni quatuor formularum, ad quas omnes secundi gradus æquationes reducuntur, subjungimus usum, quem præstant formulæ illæ in resolvendis æquationibus specialibus. Postquam enim quatuor illæ formulæ sunt resolutæ, singularumque radices inventæ; haud quidem necesse est, eadem arte æquationes resolvere speciales; sed poterit earum resolutio solius substitutionis ope obtineri, si scilicet inquiratur, ad quam ex iis formulis reducatur æquatio proposita, & in radicibus illius substituatur valores coefficientium, determinati ab ipsâ æquatione propositâ. Id igitur in unaquaque formulâ exemplis ostendimus: quo in loco illud etiam adnotamus, quod eodem artificio

ficio resolvi quoque possint æquationes secundi gradus, quarum radices sunt rationales, quæque ideo in propriâ suâ sede non existunt.

Eodem in loco ostendimus etiam resolutionem æquationum derivativarū secundi gradus, hoc est illarum æquationum, quæ talis naturæ deprehenduntur, ut tametsi dici nequeant secundi gradus, possunt nihilominus in alias secundi gradus transformari, si loco quadrati, cubi, aut alterius potestatis incognitæ, in æquatione contentæ, incognita alia substituatur. Resolvuntur ergo hujusmodi æquationes, si radices inveniantur æquationum secundi gradus, in quas eæ transformantur. Nam si deinde ex his radicibus ea rursus radix eliciatur, quam designat potestas incognitæ principalis, in cujus locum substituta est incognita altera; jam propositarum æquationum radices habebuntur.

Resolutionem æquationum secūdi gradus excipit resolutio æquationum, quarum sedes in tertio gradu subsistit. Istæ similiter, quum puræ sunt, resolvuntur nullo negotio, per solam radicis cubicæ extractionem. Sed quoniam hac ratione unica tantùm radix eruitur, & omnis æ-

quatio tot radices habere poteſt, quot maxima incognitæ poteſtas habet in eâ dimenſiones; oſtendimus, qua ratione ex æquationibus puris tertii gradus aliæ duæ radices erui poſſint. Id itaque obtineri poſſe docemus ope diviſionis, nimirum ſi æquatio propoſita dividatur per æquationem ſimplicem, radicem jam inventam continentem. Sic enim deprimetur ad aliam, quæ duas tantùm dimenſiones habebit, & cujus adeo radices dabunt radices optatas. Sed aliæ duæ iſtæ radices imaginariæ oriuntur, quum in æquatione depreſsâ quadratum ex quantitate cognitâ ſecundi termini dimidiatâ minus ſit ultimo termino, qui afficitur ſigno poſitivo.

Æquationes tertii gradus affectæ multiplicis ſpeciei eſſe poſſunt. In iis namque oriri poteſt affectio, vel quia ſecundus terminus habetur, & tertius deficit; vel viciſſim, quia tertius habetur, & ſecundus deficit; vel denique, quia tam ſecundus, quàm tertius terminus in iis reperitur. Interim, quia regula habetur ſatis expedita ad tollendum ſecundum terminum ex omni æquatione, ſatiùs duximus eas tantùm tertii gradus æquationes affectas conſiderare, quæ ſecun-

cundo termino carentes, tertium dumtaxat terminum habent. Istæ æquationes, pro diversitate signorum, quibus affici possunt termini ipsarum, ad quatuor quoque formulas reducuntur, quarum proinde resolutionem sigillatim ostendimus.

Primò igitur earum formularum docemus resolutionem, in quibus tertius terminus afficitur signo positivo. Formulæ istæ unicam tantùm habent radicem realem; quæ positiva est, si ultimus terminus afficiatur signo negativo; negativa verò, si vicissim afficiatur signo positivo. Hanc radicem invenimus, constituendo novam æquationem, quæ unicam similiter contineat radicem realem, & cum istâ propositam comparando. Quumq; ea oriatur expressa duplici nomine; aliam proponimus rationem pro inveniendâ radice istâ, nimirum duo illa nomina assumendo indeterminatè, eaque deinde determinando æquationibus totidem, quæ ita quidem ad sex dimensiones ascendunt, ut tamen derivativæ secundi gradus dici debeant. Earundem formularum aliæ duæ radices imaginariæ sunt, quæ inveniuntur, si utique unaquæque ex iis formulis dividatur per æquationem

simplicem, radicem suam realem jam inventam continentem.

Ostendimus deinde resolutionem illarum formularum, in quibus tertius terminus afficitur signo negativo. Hujusmodi formulæ possunt tres radices reales habere; ex quibus duæ erunt positivæ, & una negativa, si ultimus terminus afficiatur signo positivo; & vicissim duæ negativæ, & una positiva, si ultimus terminus sit affectus signo negativo. Sed radices duæ, quæ sunt ejusdem signi, possunt quandoque esse imaginariæ: scilicet si cubus ex triente quantitatis cognitæ tertii termini minor sit quadrato, quod fit ex ultimo termino dimidiato. Itaque tunc demum duæ istæ formulæ radices omnes reales habebunt, quum cubus ex triente coefficientis tertii termini non est minor quadrato, quod fit ex semisse ultimi termini. Nec reticemus, radices duas, quæ sunt ejusdem signi, æquales esse inter se, quum cubus ille æqualis fuerit prædicto quadrato.

Hinc in resolutione harum formularum tres casus distinguimus. Primus est, quum unicam tantùm habent radicem realem, & alias duas imaginarias. Secundus, quum omnes habent radices reales, sed

sed duæ illæ, quæ sunt ejusdem signi, æquales sunt inter se. Et tertius, quum omnes radices sunt reales, & inæquales. Ostendimus autem resolutionem istarum formularum tunc demum obtineri posse, quum vel unicam tantùm habent radicem realem, vel omnes quidem, sed duæ illæ, quæ sunt ejusdem signi, æquales sunt inter se. At verò, quotiescumque radices omnes sunt reales, & inæquales, id quod contingit, quum cubus ex triente quantitatis cognitæ secundi termini major est quadrato, quod fit ex ultimo termino dimidiato; tunc methodum, in resolutione istarum æquationum à nobis usurpatam, deficientem deprehendimus.

Hanc impossibilitatem, quæ nobis sese obtulit in resolvendis æquationibus tertii gradus, quarum radices omnes sunt reales, norunt ipsimet Itali, qui resolutionem harum æquationum primùm tradiderũt, quemadmodum colligere licet ex litteris, quæ intercesserunt inter Gardanum, & Tartaleam. Nec equidem post inventam regulam æquationes istas resolvendi, quisque eam perficere potuit; quin imò Cartesius rem omnino deploratam existimavit: quem in finem aliã methodo radices æquationum omnium docuit invenire, sci-

ſcilicet per longitudines linearum, quæ curvarum interſectione determinantur. Unde non immeritò gloriari poſſunt Itali, ipſos Algebram perduxiſſe ad eum uſque terminum, ad quem humani ingenii viribus poterat pervenire.

Id candidè fatetur ſolertiſſimus Auctor Hiſtoriæ Regiæ Academiæ Pariſienſis Dominus Fontanelle. Nam anno 1705 referens methodum quandam generalem, excogitatam à Domino de Lagney, pro reſolutione æquationum omnium, hæc primò præmittit: *Il eſt glorieux aux premiers Auteurs, qui ont travaillè ſur l'Algebre, que des difficultez, qu'ils n'ont pû vaincre, ne ſojent pas encore ſurmontèes. Le cas irreductible du troiſièmme dègrè l'eſt encore, comme il l'ètoit du temps de Cardan, car l'Algebre n'eſt proprement connue, que depuis deux cens ans, & nous l'avons reçue des mains des Italiens.*

Jam, quum duæ iſtæ formulæ unicam tantùm habent radicem realem, reperimus eam, conſtituendo novam æquationem, quæ unicam ſimiliter contineat radicem realem, & cum iſtâ propoſitam formulam comparando. Hæc radix, perinde ac in aliis duabus formulis, oritur ex-

preſ-

pressa duplici nomine : unde inveniri quoque potest, assumendo duo illa nomina indeterminatè, quemadmodum in prioribus duabus formulis factum. Quum sic radix reperitur, nulla supponitur relatio inter cubum, qui fit ex triente quantitatis cognitæ tertii termini, & quadratum, quod fit ex ultimo termino dimidiato. Unde arbitratus est clarissimus Wallisius, eam in omni casu radicem esse propositæ æquationis; neque adeo imperfectam esse resolutionem æquationum cubicarum ab Italis traditam. Sed perperam, quia quum æquatio tres radices reales supponitur habere, radix illa, quæ reperitur, quantitatibus imaginariis exprimitur, nec proinde est vera ejus expressio.

Qua autem ratione radix oriatur expressa quantitatibus imaginariis, quum æquatio tres radices reales supponitur habere, exinde colligit Isaac Newtonus in Arithmeticâ suâ universali, quia quum radices illæ eodem modo se habeant ad terminos æquationis, & indifferenter per incognitam designentur, deberent utique omnes eadem lege erui, & exprimi, qua una aliqua eruitur, & exprimitur. Unde, quia tres omnes lege præfatâ expri-

primere, impossibile est, quum quantitas, quæ supponitur æqualis incognitæ, utpote linearis, multiplex esse nequeat; falsa erit hypothesis, quod incognita quantitatem illam linearem adæquet, & ex hypothesi impossibili conclusionem impossibilem colligi mirum esse non debet.

Sed hanc tanti Viri rationem, etsi primâ facie valde speciosam, improbamus; tum quia jam novimus, quantitatem, quæ multiplex esse debet, sic quidem per analysim designari, ut prodeat adhuc indeterminata; tum etiam, quia eadem conclusio impossibilis eruitur quoque ex hypothesi possibili, quemadmodum primus omnium in suis Elementis Mathematicis demonstravit Pater Præstetus. Itaque concludimus ex aliis principiis impossibilitatem hujus rei deducendam esse. Et quamquam clarissimus Wallisius non adeo deploratum casum existimet; quum etsi radix illa realis sit expressa per latera cuborum, qui quantitatem continent imaginariam, fieri tamen possit, ut expressio realis evadat, scilicet si latera illa extrahantur; nihilo tamen minus ostendimus hoc Viri summi cogitatum sibi locum vindicare dumtaxat, quum radix

dix illa est realis simul, & rationalis: quod animadverterat jam pridem ipse Nicolaus Tartalea, Auctor resolutionis æquationum cubicarum.

Igitur in æquationibus cubicis, casus quum omnes radices sunt reales, est omnino deploratus, nec intra cancellos calculi algebraici potest contineri. Interim si radices illæ per longitudines linearum sint designandæ, ostendimus non deficere nobis Geometriam. Poterat autem id variis modis obtineri. Sed quoniam de geometricâ æquationum constructione fusiùs nobis agendum erat libro quarto, placuit eum tantùm modum afferre, quem protulit primus omnium Albertus Girardus in libello, cui titulus *Invention nouvelle en l'Algebre*, & quem in suâ Geometriâ adhibuit quoque Cartesius, ut ostenderet omnia problemata, quorum æquationes ad tres, vel quatuor dimensiones ascendunt, resolvi posse, vel inventione duarum mediarum proportionalium inter duas datas quantitates, vel etiam alicujus dati arcus trisectione.

Itaque, quum omnes æquationis cubicæ radices sunt reales, ostendimus radices illas designari posse per chordas, quæ trientes nonnullorum arcuum subtendunt.

dunt. Si enim oporteat datum aliquem arcum trifariam partiri, invenietur in resolutione hujus problematis æquatio cubica, cujus omnes radices sunt reales. Unde vicissim, quotiescumque occurrit æquatio aliqua cubica, quæ radices omnes reales habeat, poterunt radices illæ per arcus cujusdam trisectionem geometricè designari. Qua autem ratione fiat, ut problema de dati alicujus trisectione tribus modis solvi possit, paulò accuratiùs inquiritur, ostenditurque id exinde pendere, quia quum datum aliquem arcum tripartitò oportet dividere, problema perinde resolvitur, ac si invenienda esset recta lineâ, quæ ab una arcus extremitate ter aptari possit in circuli circumferentiâ, donec ad punctum alterum perveniatur.

Cæterùm, ne circa resolutionem æquationum cubicarum aliquid, quod scitu sit dignum, Lectores nostri ignorarent, subjũgitur methodus, qua primùm Itali istarũ æquationum resolutionem tradiderunt, ejusque artificium paulò clariùs, quàm ab aliis factum est, explicatur. Res autem ab ovo, ut dici solet, ostenditur, & quibus vestigiis Itali insistentes in methodum illam inciderint, aperitur. Quumque

que ejus inventio synthesi potiùs, quàm analysi debeatur; illud etiam ostenditur, qua ratione methodus ista resolvendi æquationes cubicas possit analysis ope reperiri; quod quidem facile nobis fuit ostendere, quum eò res tota reducatur, ut inveniatur quantitas, per quam sic transformanda sit æquatio cubica proposita, ut non modò secundo, verùm etiam tertio termino deficiens oriatur.

Sequitur resolutio æquationum, quarum sedes in quarto gradu subsistit. Hujusmodi æquationes, ut rectè intelligatur natura prolematum, ex quibus ipsæ derivantur, in duas classes distinguimus; nam quædam sunt talis naturæ, ut affectionem cubicam contineant; aliæ vicissim ejusmodi sunt, ut ab affectione cubicâ sint prorsus immunes. Æquationes quarti gradus, quæ puræ sunt, hoc est, primum tantùm, & ultimum terminum habent, ab affectione cubicâ sunt semper immunes; quandoquidem quatuor ipsarum radices per duplicem quadratæ radicis extractionem inveniuntur. Immunes sunt etiam ab affectione cubicâ æquationes quarti gradus, in quibus tum secundus, cùm quartus terminus deficit. Sunt enim hujusmodi æquationes derivativæ se-

secundi gradus; adeoque valores ipsarum inveniuntur, extrahendo radicem quadratam ex valoribus æquationum secundi gradus, ex quibus derivantur. Itaque eæ solæ æquationes quarti gradus possunt affectionem cubicam continere, in quibus adest, vel secundus terminus, vel quartus, vel etiam uterque.

Generalis æquationum quarti gradus resolutio Bombellio debetur. Resolvuntur autem æquationes istæ, derivando alias ex iis, quæ sint trium tantùm dimensionum. Itaque hoc primum docetur, qua ratione ex æquationibus quarti gradus possint aliæ trium tantùm dimensionum derivari: qua in re supponimus sublatum esse ex æquationibus quarti gradus terminum secundum; quia id regulâ satis expeditâ, fieri semper posse, jam superiùs vidimus. Derivantur ergo ex æquationibus quarti gradus æquationes aliæ, quæ sint trium tantùm dimensionum, assumendo indeterminatè æquationes duas secundi gradus, & ex earum multiplicatione aliam componendo, quæ sit ejusdem gradus cum æquatione propositâ. Nam, conferendo deinde terminos unius ordine cum terminis alterius, inveniuntur totidem æquationes, quot in

æqua-

æquationibus componentibus assumuntur quantitates indeterminatæ : proindeque si ex iis æquationibus alia eruatur, in qua ea sola maneat quantitas indeterminata, quæ est coefficiens secundi termini in utraque æquationum componentium; ascendet illa ad tres dimensiones, adeoque erit æquatio cubica quæsita.

Jam ope hujus cubicæ æquationis semper determinari possunt æquationes duæ componentes secundi gradus. Unde, quum æquatio proposita in duas illas dividatur, obtinebitur ejus resolutio, si utique duæ illæ regulis antea traditis resolvantur. Nec refert, quod in æquationibus illis secundi gradus coefficientes terminorum quantitates contineant radicales. Id enim resolutioni illarum æquationum nequaquam esse potest impedimento; quia regulæ superiùs traditæ æquè procedunt, quum coefficientes terminorum sunt radicales, quàm quum sunt commensurabiles, ac rationales. Sed tantùm efficiet, ut radices ipsarum radicales radicalium contineant: quod mirum esse non debet, quum radices illæ ad æquationes quarti gradus propriè referantur.

Porrò autem mediantibus cubicis æquationibus, quæ derivantur ex æqua-

tionibus quarti gradus, non modò istarum, quum fuerint in propriâ sede, resolutio obtinetur, cognosciturque num affectionem contineant cubicam, an ab eâ sint immunes; verùm etiam innotescit nobis, num æquationes quarti gradus existant in propriâ sede, an verò in duas secundi gradus sint divisibiles: adeò, ut si casum excipias, quum æquationes quarti gradus unam continent radicem rationalem, poterit earum natura perspecta fieri, ac explorata per solas æquationes cubicas, quæ derivantur ex iis.

Quotiescumq;enim æquationes illæ cubicæ existunt in propriâ suâ sede, ostendimus etiam in propriâ suâ sede esse æquationes quarti gradus, easdemque affectionem quoque cubicam continere. Sed si æquationes cubicæ non sint in propriâ suâ sede, verùm valorem habeant rationalem; tunc ostendimus, quod si valor iste talis sit, ut elici exinde nequeat quadrata radix, æquationes quarti gradus existant quidem in propriâ suâ sede, sed immunes sint ab affectione cubicâ; quod si verò ejuscemodi fuerint, ut exinde quadrata radix elici possit, æquationes quarti gradus non sint in propriâ suâ sede, sed in duas alias secundi gradus sint divisibiles.

At-

Atque hac occaſione notamus, quàm appoſitè analyſis omnes rei, de qua agitur, caſus nobis oſtendat, & qua ratione unâ, eademque viâ ſingulis ſatisfaciat. Quotieſcumque enim æquationes quarti gradus nullam habent radicem rationalem, tria contingere poſſunt; vel nempe, ut ſint diviſibiles in duas ſecundi gradus; vel ut exiſtāt in propriâ ſuâ ſede, ſed immunes ſint ab affectione cubicâ; vel denique ut affectionem cubicam contineant. Unde, quum æquationes cubicæ, quæ ex iis derivantur, tales ſint, ut incognita in iis duplicatas habeat dimenſiones; perſpicuum eſt circa ejus valorem tria quoque contingere poſſe; primò, ut ſit rationalis; ſecundò, ut ſit expreſſus per radicalem quadratam; & denique, ut radicales cubicas comprehendat.

Jam, quum reſolutio æquationum quarti gradus obtineatur, reſolvendo æquationes cubicas, quæ derivantur ex iis, fit hinc, ut quemadmodum non omnes æquationes cubicæ reſolvi poſſint, ſed eæ tantùm, quæ unicam habent radicem realem; ita nec omnium æquationum quarti gradus reſolutio poſſit haberi, ſed earum tantummodò, ex quibus tales derivantur æquationes cubicæ, ut & ipſæ

etiam resolvi possint. Itaque post traditam methodum resolvendi æquationes quarti gradus, ad rem visum est, ostendere, quæ inter istas æquationes tales sint, ut cubicæ æquationes, quæ ex iis derivantur, omnes habeant radices reales, nec ideo resolvi possint.

Hujusmodi sunt æquationes illæ quarti gradus, quæ vel omnes habent radices reales, vel omnes imaginarias: ex quo fit, ut eæ tantùm æquationes quarti gradus resolvi possint, quæ duas habent radices reales, & alias duas imaginarias. Sed ad rem visum est etiam ostendere, qua ratione æquationes quarti gradus, quæ radices omnes reales habent, distingui possint ab iis, quæ omnes habent radices imaginarias: idque deducimus ex æquationibus cubicis, quæ ex iis derivantur. Nam quotiescumque æquationes quarti gradus radices omnes reales habent, ipsarum æquationes cubicæ non modò radices omnes reales habebunt, verùm etiam secundum terminum affectum signo negativo, & tertium signo positivo: quod secus est, si æquationes quarti gradus radices omnes habeant imaginarias; quia tunc secundus terminus æquationum cubicarum, quæ ex iis derivantur, affici

qui-

quidem potest signo negativo, sed tali quoque signo erit affectus terminus tertius.

Quoniam autem resolutio æquationum quarti gradus adeo generaliter ostensa erat, ut quæ sint earum radices nec in formulis innotuerit, sub quibus æquationes omnes solent exhiberi; necessarium duximus ejus resolutionis in Tyronum gratiam exempla nonnulla proferre. Itaque primò exemplis illustramus resolutionem earum quarti gradus æquationum, quæ existunt quidem in propriâ sede, sed immunes sunt ab affectione cubicâ; tum exempla proferimus resolutionis æquationum quarti gradus, quæ affectionem cubicam continent, quæque tunc tantùm resolvi possunt, quum duas habent radices reales, & alias duas imaginarias.

Exemplis etiam ostendimus reductionem æquationum quarti gradus, per æquationes cubicas ex iis derivatas; atque hac occasione methodum etiam exhibemus, quam excogitavit Vir Clarissimus Hyacinthus Christophorus pro reducẽdis æquationibus quarti gradus beneficio æquationum cubicarum, utpote scitu dignam, & in praxi valde facilem, ac ex-

peditam. Hac methodo usus est Auctor dumtaxat pro reducendis æquationibus quarti gradus; sed eandem censet etiam sibi locum vindicare in earundem resolutione, quum fuerint in propriâ suâ sede: quod utique si fuerit, pollicitus est nobis super eâ re epistolam scribere.

Denique ad resolutionem æquationum, quæ plures habent dimensiones, quàm quatuor, gradum facimus, non quòd eam tradere nobis animus esset, sed tantùm ut principia indicaremus, quibus ea possit obtineri. Hujusmodi principia duo sunt. Primum, quod illæ quidem æquationes, quæ dimensiones habent numero impares, tunc demũ resolvi possint, quum unam habent radicem realem, & alias omnes imaginarias; eæ verò, quæ dimensiones habent numero pares, resolvi queant tunc tantùm, quum habent duas radices reales, & reliquas omnes imaginarias. Alterum, quod radix realis cujusque æquationis, quæ secundo termino caret, generaliter tot terminos possit continere, quot sunt dimensiones æquationis, unâ demptâ.

Ex duobus hisce principiis duplicem quoque colligimus methodum generalem pro resolvendis æquationibus omnibus,

quæ

quæ quidem ſunt ipſiſſimæ illæ, quas pro reſolutione æquationum cubicarum adhibuimus. Prima etenim procedit, aſſumendo radices æquationis indeterminatè, & cōponendo ex iis novam æquationem; quas deinde determinat per comparationem novæ iſtius æquationis cum illâ, de qua agitur. Altera verò procedit, inquirendo valorem unius tantummodò radicis, quam etiam indeterminatam aſſumit. Utraque methodus neminem latuit recentium Algebriſtarum, ſed defectu illorum principiorum eas ad æquationes altioris gradus extendere auſus eſt nemo.

Itaque, quantum ad primam methodū, ut ea omnibus cujusque gradus æquationibus poſſit applicari, illud porrò requiritur, ut radices aſſumantur tales quidem, quales eſſe debent, ut æquationis reſolutio poſſit obtineri: nempe, ut una ſit realis, & aliæ omnes imaginariæ, ſi æquationis dimenſiones fuerint impares numero; & ut duæ ſint reales, aliæque omnes ſimiliter imaginariæ, ſi æquatio dimenſiones habuerit numero pares. Id in reſolutione æquationum cubicarum oſtenſum jam erat. Itaque hoc idem oſtenditur quoque in reſolutione æquatio-

num quarti gradus, quæ tradita erat methodo omnino diversâ.

Quantum verò ad alteram methodum, ut ea æquationibus altioris gradus possit applicari, necesse est radicem, quam quærimus, ita quidem assumere indeterminatè, ut tot terminis constet, quot sunt dimensiones æquationis, de qua agitur, unâ demptâ. Ea autem in hunc modum assumpta determinabitur, si fiat ex ipsâ potestas æquationis gradui correspondens. Nam siquidem in hac potestate distinguantur à se mutuò partes, quæ æquationis terminis subalternis correspondent; per comparationem istarum partium cum terminis illis habebuntur totidem æquationes, quot requiruntur ad determinandas quantitates, quæ in assumptâ æquationis radice continentur. Et quoniam non ita facile est in potestate, quæ fit ex assumptâ radice juxta gradum æquationis, distinguere à se mutuò partes, quæ correspondent æquationis terminis subalternis; theorema proinde subjungimus, quo mediante distinctio ista nullo negotio fieri possit.

Hoc in loco docemus etiam, qua ratione inveniri possint limites, quibus radi-

dices cujuſcumque æquationis continentur. Et quamquam id obtineri poſſet methodo ſuperiùs traditâ, quia tamen methodus illa, ob difficilem calculum, non tam videtur ad praxim expedita, quin etiam dumtaxat locum ſibi vindicat in æquationibus, quæ nullas habent radices imaginarias; placuit limites radicum cujuſque æquationis aliâ methodo definire, quæ & facilior eſſet, & ad omnes æquationes ſe extenderet. Eodem in loco docemus etiam, quâ ratione cognitis limitibus, intra quos conſiſtit æquationis radix una, poſſit ad radicis illius valorem verum impoſſibilem propiùs ſemper, ac propiùs appropinquari.

Hæc methodus inveniendi limites, intra quos conſiſtunt radices æquationis, & ad veros earum valores appropinquandi locum ſibi vindicat tantùm in æquationibus numericis: unde, ſi æquationes propoſitæ fuerint litterales, quò iis poſſit hæc methodus applicari, neceſſe eſt litterarum loco ponere valores numericos. Sed quoniam æquationes litterales excidunt univerſalitate ſuâ, quum in iis loco litterarum numeri ſubſtituuntur; aliam proinde methodum exhibemus reſolvendi per approximationem æquatio-

nes

nes litterales, nimirum beneficio serierum infinitarum: atque hac occasione explicamus, quid intelligunt Recentiores per regressum serierum; hujusque regressus exempla duo generalia ex Newtono mutuata proferimus, quæ in casibus specialibus possunt velut canones adhiberi.

Quum æquationes resolvendæ sunt puræ, omnibusque terminis intermediis carent, eò res redit, ut ex puris potestatibus radices extrahantur. Hinc siquidem radices illæ inveniri nequeunt exactè, haberi poterunt per approximationem, vel beneficio fractionum decimalium, vel ope logarithmorum. Verumtamen quia à Viro Clarissimo Edmundo Hallejo, occasione nonnullarum formularum, quas protulit Dominus de Lagney, pro extrahendâ radice cubicâ, detecta est formularum methodus quædam generalis, pro quavis potestate satis concinna, visum est methodo istâ secundo nostræ Algebræ libro finem imponere.

FINIS.

INDEX
CAPITUM, ET ARTICULORUM
LIBRI SECUNDI.

De speciosa problematum resolutione.

CAP. I.

CAP. II.

I. *Pro-*

C A P. III.

De natura, & proprietatibus æquationum.

C A P. IV.

De multiplici æquationum transformatione.

C A P. V.

De reductione æquationum ad propriam sedem.

V.

CAP. VI.

De resolutione æquationum secundi gradus.

CAP. VII.

De resolutione æquationum tertii gradus.

CAP. VIII.

De resolutione æquationum quarti gradus.

CAP. IX.

De resolutione æquationum altioris gradus.

AL-

ALGEBRÆ ELEMENTORUM LIBER II.

De speciosa problematum resolutione.

Explicato calculo litterali, sive specioso, ad problematum resolutionem speciosam gradum nunc facimus, in qua usus ejus calculi potissimùm cernitur. Et quoniam in omni problemate duo quantitatum genera continentur: nempe datæ, sive notæ, & incognitæ, sive quæsitæ; unicum medium, quo utitur Algebra ad problemata quæcumque resolvenda, est æquationis artificiũ. Æquationis etenim

ope subinde confert quantitates in problemate quæsitas cum aliis datis, sive notis, ut tandem æqualitatem deprehendat inter eas.

Hinc monitum Lectorem velim, quod tametsi æquationis, & æqualitatis voces indistinctè ab Algebristis accipiantur, eæque etiam à nobis promiscuè in posterum usurpentur; attamen si de propriis earum vocum significationibus sollicitos nos esse oporteat, subinde quidem æquatio distinguenda esset ab æqualitate, ut æquatio propriè deberet dici comparatio duarum quantitatum inæqualium, instituta ea ratione, ut reddantur æquales; æqualitas verò comparatio duarum quantitatum jam æqualium, hoc est ipsa earum quantitatum identitas.

Jam, ut Tyronibus nostris liquidò constet, quo demum artificio ad problemata resolvenda Algebra æquationes, sive æqualitates adhibeat, ostendemus primò summatim universam methodum resolvendi problemata per species, sive litteras Alphabeti. Neque enim eorum hac in re probo docendi rationem, qui nulla hujus methodi idea præmissa, ad æquationum naturam, & affectiones explicandas statim se conferunt. Sic namque Tyronum animi

mi in suspenso manent, nec satis intelligunt, quorsum colliment, quæcumque traduntur.

CAP. I.

Methodus resolvendi problemata summatim ostenditur.

IN problematum resolutione duplex methodus adhiberi potest; quarum una dicitur synthesis, sive compositio; altera analysis, sive resolutio. Synthesis adhibetur, quotiescumque ex iis, quæ nobis nota sunt, eo usque componendo progregredimur, donec in quæsiti cognitionem incidimus. Analysis vicissim, quum à quæsito, velut concesso, eo usque progredimur resolvendo, donec ad aliquod pervenimus jam cognitum, & exploratum.

Utramque methodum apud Veteres in usu fuisse, testatur Pappus Alexandrinus, ipsaque Veterum monumenta abundè confirmant. Unde colligi potest, quàm oscitanter nonnulli, ut Recentiores plus justò extollerent, eos artificii analytici Auctores constituant. Neque enim Veteres tantam veritatum segetem invenire potuissent, nisi iis adjumento fuisset ana-

lysis. Et quamquam veritates illas synthetica methodo ut plurimũ nobis exponant; id tamen factum, quia norunt propriam methodum ad docendum synthesim esse, unde etiam methodus doctrinæ vocitatur.

Veritates autem analyticè detectas facile quidem est componere, easque synthetica methodo tradere. Analyticè quippe aliquid reperimus, quotiescumque id, quod quæritur, velut jam factum ponentes, eo usque progredimur, donec in aliquod incidimus, jam nobis cognitum, & exploratum. Quocirca vicissim assumentes, quod prostremò nobis obtulit resolutio, & ordinantes secundùm naturam ea antecedentia, quæ illic consequentia erant, mutuaque illorum facta compositione, necesse est, ut tandem ad quæsiti finem perveniamus.

Quod ut liquidò constet, simulque utriusque methodi exemplum unum, aut alterum in medium afferamus, proponatur primò resolvendum hujusmodi problema: rectam lineam datam AB producere usque ad punctum C, ita ut rectangulum ACB æquale sit ei, quod super AB describitur, quadrato. Ponatur jam factum. Et quoniam rectangulum ACB est

FIG. I.

eſt æquale rectangulo ABC unà cum BC quadrato; erit rectangulum ABC unà cum BC quadrato æquale quadrato ex AB. Sed poſita BD æquali BC, AB quadratum eſt æquale rectangulo ABC unà cum rectangulo BAD. Quare erit BC, ſive BD quadratum æquale rectangulo BAD; & propterea recta linea AB ſecta erit extremâ, ac mediâ ratione in puncto D.

Hinc, quia invento puncto D, invenitur etiam punctum C; componemus propoſitum problema, ſi ſecta recta linea data AB extremâ, ac mediâ ratione in puncto D, ita ut AD ſit ſegmentum minus, BD ſegmentum majus, protrahamus AB verſus C, donec fuerit BC æqualis BD. Nam quum BC, ſive BD quadratum æquale ſit rectangulo BAD, appoſito communi rectangulo ABC, erit BC quadratum unà cum ractangulo ABC æquale rectangulo BAD unà cum rectangulo ABC, ſive ABD. Sed BC quadratum unà cum rectangulo ABC eſt æquale rectangulo ACB; & rectangulum BAD unà cum rectangulo ABD eſt æquale quadrato ex AB. Quare erit rectangulum ACB æquale ei, quod ſuper AB deſcribitur, quadrato.

Proponatur ſimiliter reſolvendum hoc

alιud problema : rectam lineam AB sectā FIG. 3. in puncto C producere usque ad punctum D, ita ut rectangulum ADB æquale sit ei, quod super CD describitur, quadrato. Ponatur jam factum. Et quoniam rectangulum ADB æquale est CD quadrato, erit ut AD ad CD, ita CD ad BD. Unde, quia tota AD est ad totam CD, ut ablata CD ad ablatam BD; erit reliqua AC ad reliquam CB, ita tota AD ad totam CD: & propterea, si ponatur CE æqualis ipsi CB, erit convertendo, ut AD ad AC, ita AC ad AE: proindeque tota AD erit tertia proportionalis in ordine duarum AE, AC.

Hinc componetur problema in hunc modum: abscindatur ex AC portio CE æqualis ipsi CB, tum fiat ut AE ad AC, ita AC ad AD. Dico D esse punctum quæsitum. Quoniam enim AD est ad AC, ut AC ad AE, erit convertendo, ut AD ad CD, ita AC ad CE, sive CB. Unde, quia tota AD est ad totam CD, ut ablata AC ad ablatam CB; erit reliqua CD ad reliquam BD, ut tota AD ad totam CD: proindeq; quum rectangulum ADB æquale sit ei, quod super CD describitur, quadrato, erit D punctum quæsitum.

Eadem ratione si ADB sit semicirculus, cu-

cujus centrum punctum C, & demissa ad diametrum AB perpendiculari DE, quæratur num DE quadratum æquale sit rectangulo AEB, analyticè inquiremus illud hoc modo. Ponatur DE quadratum æquale rectangulo AEB. Itaque addito communi quadrato ex CE, erunt quadrata duo DE, CE æqualia rectangulo AEB unà cum CE quadrato. Jam verò juncta CD, propter triangulum rectangulum CED, quadrata duo DE, CE sunt æqualia quadrato ex CD; itemque, quia recta AB secta est bifariam in puncto C, & non bifariam in puncto E, rectangulum AEB unà cum CE quadrato est æquale quadrato ex CB. Quare erit CD quadratum æquale CB quadrato; & propterea CD ipsi CB æqualis erit. Fig. 3.

Hinc quia proprietas semicirculi ADB hæc est, ut CD ipsi CB sit æqualis, syntheticè, quod quæritur, ostendemus in hunc modum. Quoniam CD est æqualis CB, erit CD quadratum æquale CB quadrato. Sed, propter triangulum rectangulum CED, CD quadratum est æquale CE, DE quadratis; itemque, quia recta AB secta est bifariam in puncto C, & non bifariam in puncto E, CB quadratum est æquale rectangulo AEB unà cum CE qua-

drato. Quare erunt quadrata duo DE, CE æqualia rectangulo AEB unà cum CE quadrato; proindeque ablato communi quadrato CE, supererit DE quadratum æquale rectangulo AEB.

Allatis igitur exemplis abundè, opinor, liquet, quæ sit methodus analytica, quæve synthetica; & quo pacto veritates analyticè detectæ possint synthetica methodo aliis ostendi. Sed licèt in resolutione problematum utramque methodum adhibuerint Veteres, & veritates primò quidem invenerint analyticè, deinde verò eas exposuerint syntheticè; dubitari tamen nequit, quin usum analysis in problematum resolutione præstantiorem reddiderint Recentiores. Quum enim felici successu quantitatibus omnibus calculum applicuerint, totamque adeo mathesim, velut quandam speciem Arithmetices, effecerint; facultatem resolvendi problemata mathematica, ita quidem facilitarunt, ac universaliorem reddiderunt, ut nihil ampliùs in ea desiderari posse videatur.

Jam artificii analytici, in resolutione problematum à Recentioribus usurpati, quatuor sunt operationes præcipuæ; quarum prima est problematis, sive quæstionis

nis ſtatus clara, ac evidens cognitio; ſecunda datarum, & quæſitarum quantitatum appoſita denominatio; tertia æquationis inter datas, & quæſitas quantitates inventio; & quarta demum inventæ æquationis legitima reductio, ac reſolutio. Unde, ut rectè intelligant Tyrones, quo pacto problemata omnia reſolvantur beneficio ejus analyſis, quam Recentiores excoluerunt, ſingulas illas operationes ſigillatim hoc capite explicare non gravabimur.

I.

Problematis, ſive quæſtionis ſtatus clara, ac evidens cognitio.

Reſoluturus aliquod problema, illud prima fronte conſiderabit, qui ſit propoſitæ quæſtionis ſtatus, quidve illud, quod in ipſo quæritur problemate. Id autem obtinebit, ſi ſedulò conditiones evolvat, quæ in ipſa quæſtione continentur. Nam mentis noſtræ limitatio id quidem exigit, ut quod incognitum eſt, dumtaxat ex cognitis quibuſdã conditionibus eruere valeat. Unde, ut ſtatus quæſtionis clarè, ac evidenter cognoſcatur, conditiones oportet conſiderentur in ipſa quæſtione ap-

appositæ, quippe quæ relationem nobis ostendunt, quam ad datum, sive cognitum id, quod quæritur, debet habere.

Hoc pacto, si proponatur resolvendum sequens problema arithmeticum: invenire duos numeros, quorum summa sit 100, differentia autem 40; liquet in hoc problemate, duas quantitates esse cognitas, sive datas, quales quidem sunt numeri 100, & 40; alias verò duas esse incognitas, sive quæsitas, cujusmodi sunt duo numeri, qui quæruntur. Quocirca, ut statū quæstionis distinctissimè intelligamus, consideremus oportet conditiones appositas in ipso problemate, quæ exprimunt nobis relationes, quas incognitæ quantitates ad quantitates cognitas debent habere: quales quidem sunt duæ; una quod numeri inveniendi tales esse debeant, ut simul sumpti conficiant 100; altera quod iidem numeri tales etiam sint oporteat, ut minor ex majori subtractus relinquat 40.

Præstat autem, conditiones appositas in problemate seriò mente contemplari, non modò, ut statum quæstionis distinctissimè intelligamus, verùm etiam quia plerumque præter conditiones, ad problematis determinationem necessarias, aliæ etiam

etiam apponuntur, quæ ut plurimum reddunt problema impossibile, si in ejus resolutione earum ratio sit habenda. Ita si inter duas datas rectas lineas binæ mediæ proportionales proponantur inveniendæ, aut etiam datus angulus rectilineus tripartitò debeat secari; & qui ejusmodi proponit problemata hanc aliam conditionem adjungat, ut eorum resolutio Geometriæ planæ præsidio, hoc est circuli, & rectæ lineæ intersectione perfici debeat: jam problemata illa solutu impossibilia erunt, si in iis resolvendis conditionis ultimo loco appositæ ratio velit haberi; nam Geometriæ planæ beneficio, nec angulum tripartitò secari, nec inter duas datas rectas lineas binas medias proportionales posse inveniri, nemo, nisi Geometriæ expers, ignorat.

Jam verò, quemadmodum plerumque præter conditiones, ad problematis determinationem necessarias, aliæ etiam adjunguntur omnino superfluæ, & quæ ut plurimum reddunt problema solutu impossibile; ita quandoque nec omnes apponuntur conditiones, quæ ad problematis determinationem sunt necessariæ: quo pacto problema indeterminatum redditur, infinitasque solutiones diversas admit-

mittit:nec alia ratione determinatum fiet, certiſque dumtaxat modis ſolvi poterit, niſi quemadmodum in primo caſu, ut problema ſit ſolubile, ſuperfluæ conditiones à problemate removentur; ſic & in iſto adjungantur, quæ deficiunt, quæque ad problematis determinationem videntur neceſſariæ.

Hinc vulgò duo problematum genera diſtingui ſolent, quorum alia dicuntur determinata, alia indeterminata. Determinata dicuntur problemata illa, in quibus conditiones appoſitæ id, quod quæritur, determinant, quæque proinde determinatum numerum ſolutionum diverſarum admittunt. Indeterminata verò vocantur ea problemata, in quibus conditiones appoſitæ quæſitas quantitates non ſatis determinant, quæque propterea infinitis modis diverſis ſolvi poſſunt. Sed his tertium problematum genus accedit, quæ pluſquam determinata dici poſſunt, qualia ſunt illa, in quibus plures apponuntur conditiones, quam quæ ad eorum determinationem requiruntur, quæque proinde ſolutù ut plurimū ſunt impoſſibilia, quotieſcumque ad omnes illas conditiones debet attendi.

Hæc tria problematum genera nemo me-

meliùs inter Recentiores distinxit, quàm Johannes Pellius, Rhonii discipulus, qui simul ostendit, quomodo de exposito problemate judicium sit ferendum: nimirum quum numerus datorum, à se mutuò independentium, minor est, quàm quæsitorum; problema est Indeterminatum, infinitarumque solutionum capax; quum verò numerus datorum, quæsitorum numerum adæquat, problema est determinatum, certumque numerum solutionum diversarum admittit; & denique quum data plura fuerint, quàm quæsita, problema erit plusquam determinatum, & fortasse impossibile, si data illa inter se mutuò sint contraria. Sed eadem problematum genera consideravit etiam inter Veteres Proclus, qui sicut problema propriè dixit id, quod est perfectè determinatum; sic vocavit problema deficiens, quod plenè determinatum non est; & problema excedens, sive redundans, quod plures habet conditiones, quàm quæ ad ejus determinationem requiruntur.

Quæ quidem omnia, ut exemplis magis illustremus, sit AB recta aliqua linea, quam subinde oporteat dividere, ut rectangulum sub segmentis ejus contentum adæquet quadratum, quod fit ex data recta

Fig. 4.

recta linea H. Jam in hoc problemate duæ exiſtunt conditiones; una, quòd latera rectanguli inveniendi ſimul ſumpta æqualia eſſe debeant datæ rectæ lineæ AB; altera, quòd idem rectangulum inveniendum æquale ſit oporteat quadrato ex data recta linea H. Has autem conditiones ad quæſiti rectanguli determinationem ſufficere, quotieſcumque data recta linea H alterius ſemiſſem nõ excedit, perſpicuum quidẽ eſt Etenim ſi ſuper AB ſemicirculus deſcribatur ACB, & ex extremitate A erecta perpendiculari AE ipſi H æquali, agatur per punctum E recta ED, quæ eidem AB parallela, ſemicirculum ſecet in punctis C, & D; demiſſis quidem ad diametrum perpendicularibus CF, DG, ex proprietate circuli, erit quæſitum rectangulum tam id, quod fit ex AF in FB, quàm id, quod fit ex AG in GB.

At verò ſi ex eodem problemate auferatur una conditio, puta, quod latera rectanguli inveniendi æqualia eſſe debeant datæ rectæ lineæ AB, & dumtaxat proponatur inveniendum rectangulum, quod ſit æquale quadrato datæ rectæ lineæ H; perſpicuũ eſt, propter defectum illius conditionis, problema indeterminatũ evadere, & non unum, aut duo, ſed infinita rectan-

ctangula exhiberi posse, quæ quæsito satisfaciant. Etenim si circulus quilibet describatur ABC, eumque contingat in puncto A recta linea AD, quæ ipsi H sit æqualis, & ex puncto D ducantur infinitæ rectæ lineæ DC, quæ circulum secent in duobus punctis B, & C; ob notissimam circuli proprietatem, palam est, unumquodque rectangulorum BDC æquale esse quadrato ex tangente AD, atque adeo ex recta linea H, cui ipsa AD est æqualis ex constructione.

FIG. 5.

Et denique, si eidem problemati, præter duas illas conditiones, tertia apponatur, nempe quòd latera rectanguli inveniendi debeant esse in data ratione: adeò, ut inveniri debeat rectangulum, quod dato quadrato æquale, habeat latera in data ratione, & quæ simul sumpta datam rectam adæquet; perspicuum est, hanc tertiam conditionem ad quæsiti rectanguli determinationem superfluam esse, quippe quod per priores duas conditiones satis aptè determinatur. Unde, si in resolutione problematis tertiæ illius conditionis ratio velit haberi, fieri fortasse potest, ut problema solutu sit impossibile: scilicet si ratio, quam habere debent latera rectanguli inveniendi, non sit ea, quam

quam utique haberent, si simul sumpta datam rectam lineam adæquent, ipsumque rectangulum dato quadrato sit æquale.

II.

Datarum, & quæsitarum quantitatum apposita denominatio.

STatu quæstionis, per conditiones in ea appositas, ritè intellecto, quo mens nostra in ejus resolutione minùs torqueatur, & imaginatio in re proposita ita quidem inhæreat, ut omnes quantitatum habitudines, sive relationes unico velut obtutu percipiantur; præstat quantitates omnes, tam datas, sive cognitas, quàm incognitas, sive quæsitas alphabeticis litteris ea quidem ratione designare, ut tamen quantitates cognitæ, sive datæ ab incognitis, sive quæsitis possint distingui. Quod etsi à primis Algebræ promotoribus ita factum sit, ut quantitates cognitæ, sive datæ vocalibus, incognitæ autem, sive quæsitæ consonantibus litteris denominentur; ab iis tamen, qui deinde secuti sunt, illud usurpatum, ut quantitates datæ, sive cognitæ prioribus alphabeti litteris, quantitates verò incognitæ, sive

five quæfitæ litteris poftremis defignentur.

Hoc pacto, fi quærantur duo numeri, quorum data fit tam fumma, quàm differentia; confidero priùs quidem attentè ftatum quæftionis; deinde, quia in illa quatuor occurrunt quantitates, quarum duæ funt datæ, five cognitæ, aliæ verò duæ incognitæ, five quæfitæ; denomino quantitates illas alphabeticis litteris, quæ ut poffint à fe mutuò nullo negotio diftingui, quantitates cognitas, five datas prioribus Alphabeti litteris defigno, quãtitates verò incognitas, five quæfitas litteris poftremis appello: nimirum fummam numerorum inveniendorum, velut datam, defigno litterâ a; differentiam eorundem numerorum, fimiliter datam, litterâ b; & ipfos illos numeros, quos oportet invenire, velut incognitos, five quæfitos, defigno litteris x, & y: qua peracta denominatione, jam quæftio eo reducitur, ut quantitatum x, & y fumma quidem debeat effe a, differentia autem b.

Similiter, fi datam rectam AB fubinde quidem oporteat dividere in puncto C, ut rectangulum ACB, fub fegmentis ejus contentum, æquale fit ei, quod fuper altera data recta linea DE defcribitur, qua- Fig. 6.

drato, fiet denominatio in hunc modum. Quoniam recta linea AB data eſt, deſignetur illa unâ ex prioribus litteris Alphabeti, nimirum litterâ a; & ſimiliter quia recta linea DE eſt data, deſignetur quoque illa alterâ ex prioribus Alphabeti litteris, puta litterâ b. Veruntamen, quia ſegmenta AC, CB ipſius rectæ AB omninò nos latent, quum ea ſint, quæ in problemate proponuntur invenienda; proinde ſegmenta illa poſtremis litteris Alphabeti deſignentur oportet, nimirum ſegmentum AC litterâ x, & ſegmentum alterum CB litterâ y. Atque hac facta denominatione, jam eò problema reducitur ut ſumma quantitatum x, & y ſit a; quod verò ex mutua earum quantitatum multiplicatione producitur, ſit quadratum quantitatis cognitæ c.

Jam verò, ut in denominatione quantitatum facienda, paucioribus, quantum fieri poteſt, litteris utamur; præſtat, ipſas quantitates ſecundùm conditiones, in problemate appoſitas, denominare. Sic quum quæruntur duo numeri, quorum data ſit tam ſumma, quàm differentia, & ſumma eorum numerorum vocatur a, differentia b, minor verò numerus x; major numerus deſignari poterit, vel per $x + b$

$x + b$; vel etiam per $a - x$. Nam differentia inter numerum majorem, & minorem est b: quare additâ differentiâ istâ numero minori x, fiet numerus major $x + b$. Et similiter summa eorum numerorum est a: quare si ex summa ista auferatur numerus minor x, supererit numerus major $a - x$. Sic etiam quum datam rectam lineã AB subinde oportet dividere in puncto C, ut rectangulum ACB sit æquale quadrato ex data recta linea DE; & data recta AB vocatur a, altera similiter data DE vocatur c, & segmentum unum AC designatur litterâ x, poterit segmentum alterum designari per $a - x$, quum sit differentia inter totam AB, & segmentum unum AC.

Quin etiam in eorum problematum resolutione, in quibus quantitates diversæ speciei occurrunt, ut faciliùs quantitates illæ possint à se mutuò distingui, juvat eas suis initialibus litteris designare. Qua ratione, si dato alicujus corporis momẽto, sive motus quantitate, datoque etiam pondere, sive quantitate materiæ ejusdem corporis, quæratur velocitas, qua corpus idem movetur; poterit quidem momentum, sive quantitas motus designari litterâ m; pondus, sive quantitas

materiæ designari litterâ p; & quæsita velocitas litterâ u. Et eadem ratione si data corporis velocitate, datoque spatio, velocitate illa percurso, quæratur tempus impensum ad spatium illud percurrendum; commodior erit denominatio, si velocitatem litterâ u, spatium litterâ s, quæsitum verò tempus litterâ t designemus.

Cæterùm, ut intelligant Tyrones immane quantum afferat adjumenti distincta, & compendiosa quantitatum denominatio, non abs re erit uno, aut altero exemplo illud ostendere. Notum est apud Geometras, quod si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum contentum sub extremis æquale sit ei, quod sub mediis continetur; notumque est etiam, quo longo circuitu veritatem istam ostendat Euclides. Jam si nomina lineis imponantur, secundùm ipsā proportionalitatis ideā; nihil erit tam faciliùs ostensu, quàm veritas illius propositionis. Itaque quia proportionalitatis idea hæc est, ut quoties prima continetur in secunda, toties tertia contineatur in quartâ; si vocetur prima a, & tertia c, posito, quod b ostendat, quoties prima in secundâ, & tertia in quartâ continetur; erit ab secunda, & cb quarta; atque adeo quatuor re-

ctæ

ctæ lineæ proportionales erunt a, ab, c, bc: in quibus jam clarè liquet, rectangulum contentum sub extremis æquale esse ei, quod sub mediis continetur; quum utrumque sit abc.

Hæc autem est proprietas proportionis, quæ dicitur geometrica; quod si verò proportio fuerit arithmetica, tunc accidens ejus præcipuum hoc est, ut summa extremarum æqualis sit summæ mediarum. Quod rursus facilè ostendetur, si nomina lineis imponantur secundùm ipsam alterius hujus proportionis ideam: nimirum quia proportionis hujus idea hæc est, ut quantum prima deficit à secunda, tantundem tertia deficiat à quarta; si vocetur prima a, & tertia c, ponaturque, quod b designet, quantum deficit tam prima à secundâ, quàm tertia à quartâ, erit $a + b$ secunda, & $c + b$ tertia: proindeque quatuor rectæ lineæ arithmeticè proportionales erunt a, $a + b$, c, $c + b$: in quibus liquidò constat summam mediarum, extremarum summam adæquare; quum utraque prodeat $a + b + c$.

Similiter Euclides propositione nona libri secundi suorum Elementorum longo circuitu ostendit hoc theorema: quod si recta quædā linea AB secetur bifariam in

FIG. 7. puncto C, & non bifariam in puncto D, quadrata partiũ inæqualium AD, DB dupla ſint quadratorũ, quæ fiunt ex dimidia AB, & portione CD, quæ inter utramq; ſectionẽ interjicitur. Sed theorema iſtud, impoſitis ritè nominibus, oſtendetur facillimè in hunc modum. Vocetur a ſemiſſis datæ rectæ lineæ AC, ſive CB; & dicatur b portio CD, quæ interjicitur inter utramque ſectionem. Erit ergo $a + b$ ſegmentum majus AD, & $a - b$ ſegmentum minus DB; atque adeò quadratum ex AD erit $a^2 + 2ab + b^2$, & quadratum ex DB erit $a^2 - 2ab + b^2$. Sed duo iſta quadrata ſimul addita ſunt $2a^2 + 2b^2$, hoc eſt dupla quadratorum, quæ fiunt ex AC, & CB. Itaque quadrata partium inæqualium AD, DB dupla ſunt quadratorum, quæ fiunt ex dimidia AC, & portione intermedia CD.

Eadem ratione oſtendi quoque poſſet theorema, quod propoſitione decima libri ſecundi Elementorum continetur: nimirum quod, ſi recta quævis AB ſecetur bifariam in puncto C, eique in directum adjiciatur alia quævis BD, quadrata, quæ fiunt ex AD, & DB, hoc eſt ex totâ, & adjectâ, tamquam ex unicâ, & ipsâ adjectâ, dupla ſint quadratorum,

FIG. 8.

rum, quæ fiunt ex AC, & CD, hoc est ex dimidiâ, & dimidiâ, & adjectâ, tamquam ex unicâ. Vocetur etenim a semissis datæ rectæ lineæ AC, sive CB, dicaturque b dimidia una cum adjectâ CD. Erit ergo $a + b$ tota, & adjecta AD, & $a - b$ adjecta sola DB: proindeque quadratum ex AD erit $a^2 + 2ab + b^2$, & quadratum ex DB erit $a^2 - 2ab + b^2$. Sed duo ista quadrata simul addita sunt $2a^2 + 2b^2$, hoc est dupla qudratorum, quæ fiunt ex AC, & CD. Itaque quadrata ipsarum AD, DB, dupla sunt quadratorum, quæ fiunt ex AC, & CD.

III.

Æquationis inter cognitas, & incognitas quantitates inventio.

IMpositis nominibus tum cognitis, tùm incognitis quantitatibus, in id deinceps incumbendũ, ut nullo facto inter quantitates illas discrimine, considerentur omnes promiscuè, velut jam notæ, & ipsius problematis conditiones eo usque evolvantur, ac inter se mutuò comparentur, donec una, eademque quantitas duobus modis diversis exprimi possit.

 Nam

Nam quum binæ illæ expressiones uni,eidemque quantitati conveniant, valor unius, alterius valorem adæquabit: & propterea instituta inter expressiones illas æqualitate per signum istud =, quod æquale apud hodiernos Algebristas significat; invenietur inter cognitas, & incognitas quantitates æquatio, cujus beneficio facilè erit unius ex incognitis quantitatibus valorem invenire.

Jam quum problema est determinatum, quia numerus datorum, à se mutuò non dependentium, incognitorum numerum adæquat, tot licebit æquationes invenire, quot occurrunt incognitæ quantitates. Iis autem inventis, in id porrò operam dandum, ut ex omnibus iis una deducatur, quæ unicam dumtaxat contineat incognitam quantitatem, cujus valor per solas quantitates cognitas expressus omninò nobis innotescat. Quod quidem obtinebitur, si in una ex iis æquationibus loco aliarum incognitarum substituantur valores ipsarum,ex æquationibus aliis deducendi. Sic enim in æquatione illa unica dumtaxat incognita quantitas remanebit, quæ quum omnes contineat problematis conditiones,ea erit,ad quam problema propriè reducitur.

Sed

Sed, ut hæc omnia exemplis magis nota fiant, nec ab iis recedamus, quæ superiùs proposuimus, si proponantur inveniendi duo numeri, quorum data sit, tam summa, quàm differentia; & instituta denominatione, vocetur summa numerorum a, differentia eorundem b, numerus major x, & numerus minor y: quia in hoc problemate duæ occurrunt quantitates incognitæ, duæ etiam sunt inveniendæ æquationes. Cumque prima problematis conditio exigat, ut summa numerorum x, & y sit a; secunda verò, ut differentia, quæ est inter majorem, & minorem, sit b: ex illa quidem deducetur æquatio sequens $x + y = a$; ex ista verò eruetur hæc alia $x = y + b$. Et siquidem in prima harum æquationum loco quantitatis incognitæ x subrogetur valor ejus $y + b$, per secundam æquationem inventus; jam tertia orietur $y + y + b = a$; sive $2y + b = a$, in qua unica incognita quantitas reperitur.

Similiter, si recta linea AB subinde secanda proponatur in puncto C, ut rectangulum, contentum sub segmentis ejus, ACB æquale sit ei, quod super DE describitur, quadrato; factaque denominatione, ponatur AB $= a$, DE $= b$; AC $= x$,

Fig. 6.

$=x$, & CB$=y$: jam in hoc problemate duæ occurrent quantitates incognitæ, & propterea duæ etiam æquationes erunt inveniendæ. Unde, quia in eodem problemate duæ ſunt appoſitæ conditiones; una, quod latera rectanguli inveniendi x, & y ſimul ſumpta æqualia eſſe debeant quantitati cognitæ a; altera, quod ipſum rectangulum inveniendum æquale eſſe debeat quadrato ex altera quantitate cognita b: ex illa quidem deducetur æquatio ſequens $x+y=a$; ex iſta verò eruetur hæc alia $xy=b^2$. Unde porrò, ſi in hac ſecunda æquatione loco quantitatis incognitæ x ſubſtituatur valor ejus $a-y$, qui per regulas mox tradendas ex prima æquatione deducitur; orietur æquatio tertia $ax-x^2=b^2$, quæ unicam dumtaxat continet incognitam quantitatem.

Sed hic monitum Lectorem velim, quod ſi nomina quantitatibus imponat ſecundùm ipſas conditiones appoſitas in problemate, ab initio inveniat æquationem, quæ unicam contineat quantitatem incognitam. Hac ratione in primo problemate, ubi quæruntur duo numeri, quorum data ſit tam ſumma, quàm differentia, poſitis ſummâ numerorum inveniendorum $=a$, eorundem differentiâ $=b$,

& nu-

& numero minori $= y$: quia ex hypothesi numerus minor differt à majori per quantitatem cognitam b, erit numerus major $= y + b$: qua peracta denominatione, jam ab initio invenietur æquatio, quæ unicam contineat incognitam quantitatem. Nam, quum ob alteram problematis conditionem, ambo numeri simul conficiant a, erit $y + y + b = a$, hoc est $2y + b = a$ æquatio quæsita.

Eadem ratione in altero problemate, ubi datam rectam lineam AB subinde oportet dividere in puncto C, ut rectangulum, sub segmentis ejus contẽtum, ACB æquale sit ei, quod super DE describitur, quadrato, pono rectam AB $= a$, rectam alteram DE $= b$, & segmentum unum AC $= x$. Quia ergo segmentum alterum CB est differentia, qua tota AB superat segmentum primum AC, erit CB $= a - x$: & propterea quia, propter conditionem problematis, rectangulum ACB æquale esse debet DE quadrato, erit $ax - x^2 = b^2$ æquatio problematis, quæ unicam comprehendit incognitam quantitatem. FIG. 6.

In resolutione ergo problematum determinatorum tot semper licebit æquationes invenire, quot incognitæ quanti-

ta-

tates occurrunt in eo. Sed si exhaustis omnibus problematis conditionibus, non inveniantur tot æquationes; tum indicio erit, in problemate non omnes appositas esse conditiones, quæ ad determinationem ejus requiruntur; & propterea resolvi posse problema infinitis modis diversis, nimirum assumendo ad libitum quantitates incognitas, quibus nulla correspondet æquatio.

Ita, si quærantur duo numeri, quorum summa tantùm sit data; problema erit indeterminatum. Nam, propter duas incognitas quantitates, quæ in hoc problemate occurrunt, duæ etiam inveniendæ essent æquationes; quum tamen, propter unicam appositam conditionem, unica tantùm inveniri possit æquatio. Positis enim summâ numerorum inveniendorum $= a$, numero uno $= x$, & numero altero $= y$, quia id tantùm in problemate datur, ut summa ipsorum x, & y sit a; hæc dumtaxat invenietur æquatio $x + y = a$.

Jam, quod problema non sit penitus determinatum, quum non inveniuntur tot æquationes, quot in illo problemate occurrunt quantitates incognitæ, nec tamen aliqua ex conditionibus appositis omittitur,

tur, ſic quidem oſtenditur. In problemate determinato numerus quæſitorum adæquare debet numerum datorum. Itaque in eo tot oportet conditiones apponere, quot incognitæ quantitates occurrunt. Æquationes autem inveniuntur per ipſas conditiones, appoſitas in problemate, ſubinde quidem, ut unaquæque conditio ſuam nobis præbeat æquationem. Igitur in problemate determinato tot oportet æquationes invenire, quot incognitæ quantitates fuerint aſſumptæ:proindeque, quotieſcumque percurſis diligenter ſingulis problematis conditionibus, numerus æquationum ab incognitarum numero deficit; indicio erit, problema non eſſe penitus determinatum, nec omnes habere conditiones, ad determinationem ejus neceſſarias.

Neque verò difficile erit definire,quot in problemate addendæ ſint conditiones, quò determinatum fiat, certiſque dumtaxat modis ſolubile. Problema namque, ut ſit omninò determinatum, neceſſe eſt tot in eo æquationes invenire, quot occurrunt quantitates incognitæ. Jam verò æquationes invenientur per conditiones, quæ apponuntur in problemate, in tantum, ut unaquæque conditio ſuam

no-

nobis suppeditet æquationem. Itaque ad determinandum problema non satis determinatum, addendæ sunt in eo tot æquationes, quot sunt quantitates incognitæ, quibus nulla correspondet æquatio, hoc est quotus est numerus, per quem numerus æquationum ab incognitarum numero differt.

Cæterùm quemadmodum, quum numerus æquationum inventarum ab incognitarum numero deficit, argumento est, problema non esse penitus determinatū, nec omnes habere conditiones, ad determinationem ejus necessarias; ita vicissim, quum numerus æquationum excedit numerum incognitarum, indicio nobis esse potest, problema esse plusquam determinatum, pluresque habere conditiones, quàm quæ ad determinationem ejus requiruntur. Et sicuti etiam numerus, per quem à numero incognitarum deficit numerus æquationum, planè nobis ostendit, quot conditiones problemati adjungi debeant, ut determinatum evadat, certumque numerum solutionum diversarum admittat; ita numerus, per quem numerus æquationum excedit numerum incognitarum ostendit nobis adamussim, quot conditiones ex problemate sint remo-

movendæ, ut possit solutio ejus obtineri.

IV.

Inventæ æquationis legitima reductio, ac resolutio.

INventa æquatione, quæ singulas problematis conditiones includens unicam contineat incognitam quantitatem; quia ea, ut plurimum, non statim apta est solvendæ propositæ quæstioni, sed magna interdum præparatione indiget, quò fiat simplicissima: ea porrò debet esse Analystæ solertia, ut æquationem illam ad simpliciorem reducat expressionem, separando, quantum fieri potest, quantitates cognitas ab incognita, & transferendo ad unam partem æquationis terminos omnes, in quibus existit quantitas incognita, & ad partem alteram omnes alios, in quibus solæ cognitæ quantitates reperiuntur. Quod equidem obtinebit, vel si membra æquationis per quantitatem aliquam multiplicet, aut dividat; vel si membris illis aliquid addat, aut subtrahat.

Et primò quidem divisione, multiplicationeque reducitur æquatio ad simplicio-

ciorem expressionem, quotiescumque conjungitur quantitas aliqua cognita cum incognitâ, vel quia in uno, eodemque termino per se mutuò multiplicatæ reperiuntur, vel etiam quia in uno, eodemque termino una per alteram divisa reperitur. Nam quotiescumque per multiplicationem sunt simul in termino aliquo conjunctæ, seperabit eas Analysta per divisionem, quæ opponitur multiplicationi, nimirum dividendo æquationis terminos omnes per cognitam quantitatem. Quotiescumque verò sunt conjunctæ in aliquo termino ad modum fractionis, separabit eas per multiplicationem, quæ opponitur divisioni, scilicet multiplicando terminos omnes æquationis per denominatorem fractionis. Nec divisione, aut multiplicatione ista alterari quicquam poterit æquatio; nam notum est, quod si æqualia dividantur, aut multiplicentur per æqualia, quæ fiunt, sint etiam æqualia.

Hac ratione, si in resolutione alicujus problematis inciderit Analysta in hanc æquationem $ax = bc$, seperabit in illa quantitatem cognitam ab incognita, dividendo utramque partem æquationis per a; quum loco ejus oriatur hæc alia

$x =$

$x = \frac{bc}{a}$. Et similiter, si ex aliquo problemate sequentem æquationem deduxerit Analysta $ax + cx = b^2 + a^2$, separabit in ea cognitas ab incognita, dividendo æquationis utramque partem per $a + c$; nam orietur $x = \frac{b^2 + a^2}{a + c}$. Quod si verò æquatio, ex aliquo problemate nata, sit $\frac{x^2}{a} = b + c$, fiet in ea separatio cognitæ ab incognita, multiplicando utramque partem per a; siquidem loco ejus habebitur hæc alia $x^2 = ab + ac$. Pariterque, ut in ista æquatione $\frac{ab}{x} = a + x$ possit incognita à cognitis separari, multiplicanda est utraque pars æquationis per x; quippe loco ejus habebitur hæc alia $ab = ax + x^2$.

Neque verò in hac alia æquatione $ab = ax + x^2$ separanda est quantitas cognita a ab incognita x, eo quod reperiantur per se mutuò multiplicatæ in termino ax. Nam in hujusmodi speciei æquationibus, quæ, ut suo loco dicemus, vocan-

tur affectæ, fieri nequit totalis incognitæ à cognitis separatio, nisi eæ per regulas inferiùs tradendas resolvantur: quippe si illius termini omnes dividantur per a, orietur hæc altera æquatio $b = x + \frac{x^2}{a}$ in qua adhuc cognita cum incognita conjungitur. Quocirca notetur hoc loco velim, quod sẽper ac maxima incognitæ potestas, quæ in æquatione continetur, cum nulla cognitarum conjungitur, ut contingit in ista æquatione $x^3 + ax^2 = a^2x + ab^2$, tunc incognita à cognitis censenda sit sufficienter separata, nec proinde separatio alia instituenda.

Separatâ, quantum fieri potest, multiplicationis, & divisionis beneficio, quantitate cognitâ ab incognitis, transferendi deinde sunt termini omnes, in quibus incognita quantitas existit, ad unam partem æquationis, ut remaneant in altera ii omnes, qui ex solis cognitis coalescunt. Id autem obtinebitur additione, vel subtractione terminorum, qui ad hanc, vel illam æquationis partem sunt transferendi; nimirum additione, quotiescumque termini transferendi afficiuntur signo $-$; & vicissim subtractione, quum iidem termi-

mini ſigno + reperiuntur affecti. Neque etiam hoc pacto alterari quicquam poteſt æquatio. Quum enim notum ſit, quod ſi æqualibus æqualia addantur, aut ſubtrahantur, aggregata, aut reſidua ſint etiam æqualia; ſemper quidem inter membra æquationis conſiſtet æqualitas, ſive iis aliquid addatur, ſive ex iiſdem quidpiam ſubtrahatur.

Itaque, ut fiat legitima terminorum tranſpoſitio in hac æquatione $x^2 - c^2 = a^2 + ax$, transfero primum ad partem alteram terminum c^2, qui quum ſigno $-$ afficiatur, addendus eſt utrique parti æquationis, ita ut æquatio fiat $x^2 - c^2 + c^2 = a^2 + ax + c^2$. Deinde transfero ad alteram partem terminum ax, qui velut affectus ſigno + ſubtrahendus eſt ex utraque parte æquationis. Et quoniam hac facta ſubtractione æquatio evadit $x^2 - c^2 + c^2 - ax = a^2 + ax + c^2 - ax$, deletis in iſta terminis omnibus, qui contrarietate ſignorum ſe mutuo deſtruunt, habebitur tandem æquatio reducta $x^2 - ax = a^2 + c^2$.

Ex quibus liquet, tranſpoſitionem iſtam terminorum fieri ſimpliciùs, ſi nulla inſtituatur additio, vel ſubtractio, ſed dumtaxat ipſi termini mutatis ſignis ad

alternas partes æquationis transferantur. Patetque etiam, quod quotiescumque in utraque æquationis parte unus idemque terminus occurrit, qui eodem quoque signo utrinque afficiatur, terminus iste ex utraq; parte sit delendus. Ita si proponatur æquatio $x^2 + ax + cx = ax + a^2$, quia terminus ax existit in utraque parte cum eodem signo, reducetur illa ad hanc aliam $x^2 + cx = a^2$.

In resolutione problematum occurrunt quandoque æquationes quædam, in quibus quantitates radicales continentur. Id quum accidit, subinde oportet æquatio reducatur, ut quantitates illæ rationales evadant. Quod quidem obtinebitur, elevando ad aliquam potestatem utramque partem æquationis. Itaque, quum una tantùm occurrit in æquatione quantitas radicalis, methodus eam reducendi hæc est. Transferantur ad partem unam æquationis quantitates omnes rationales, & relinquatur in parte altera sola quantitas radicalis. Tum elevetur utraque pars æquationis ad eam potestatem, quæ est propria sedes illius quantitatis radicalis: sicque nova habebitur æquatio, in qua nulla radicalis quantitas occurret.

Sit $\sqrt{ax} - b = a$ æquatio ex resolutio-

ne

ne alicujus problematis orta, & oporteat in ea quantitatem radicalem $\sqrt{ax}$ commensurabilem reddere. Transferatur ad alteram partem æquationis quantitas commensurabilis b, ut maneat sola quantitas radicalis in una parte. Erit igitur $\sqrt{ax} = a + b$. Deinde, quia sedes propria illius quantitatis radicalis est quadratum, sive secunda potestas, elevetur utraque pars æquationis ad secundam potestatem, & habebitur hæc alia æquatio $ax = a^2 + 2ab + b^2$, in qua nulla occurrit quantitas radicalis.

Quod si verò plures in æquatione sint quantitates radicales, tunc substitutione juvabitur Analysta in hunc modum. Sit $\sqrt{ax} = \sqrt{bx} + c$ æquatio, ex aliquo problemate nata. Ponatur $\sqrt{ax} = p$, & $\sqrt{bx} = q$. Erit igitur $ax = p^2$, & $bx = q^2$. Substituantur in æquatione proposita loco quantitatum radicalium assumpti valores, & habebitur loco ejus hæc alia $p = q + c$. Elevetur utraque pars hujus æquationis ad secundam potestatem, quæ est propria sedes utriusque quantitatis radicalis, & fiet $p^2 = q^2 + 2qc + c^2$. Erat autem $p^2 = ax$, & $q^2 = bx$. Itaque subrogatis rursus hisce valoribus, fiet $ax = bx + 2qc + c^2$, hoc est $ax - bx - c^2 =$

 2qc.

$2qc$. Elevetur iterum utraque pars hujus æquationis ad quadratum, & habebitur $a^2x^2 - 2abx^2 + b^2x^2 - 2ac^2x + 2bc^2x + c^4 = 4q^2c^2$, in qua si substituatur loco q^2 valor ejus bx, orietur tandem æquatio, libera ab omni quantitate radicali.

Sit insuper $\sqrt{ax} + a = \sqrt[3]{3a^2x}$ æquatio, ex aliquo problemate nata. Ponatur $\sqrt{ax} = p$, & $\sqrt[3]{3a^2x} = q$. Erit igitur $ax = p^2$, & $3a^2x = q^3$. Substituantur in æquatione proposita loco quantitatum radicalium assumpti earum valores, & habebitur loco ejus hæc alia $p + a = q$. Elevetur utraque pars hujus æquationis ad cubum, sive tertiam potestatem, & fiet $p^3 + 3p^2a + 3pa^2 + a^3 = q^3$. Erat autem $p^2 = ax$, & $q^3 = 3a^2x$. Itaque subrogatis hisce valoribus, erit $pax + 3a^2x + 3pa^2 + a^3 = 3a^2x$, hoc est $pax + 3pa^2 = -a^3$. Elevetur rursus æquationis hujus utraque pars ad quadratum, & habebitur $p^2a^2x^2 + 6p^2a^3x + 9p^2a^4 = a^6$, in qua si loco p^2 substituatur valor ejus ax, orietur tandem æquatio $x^3 + 6ax^2 + 9a^2x = a^3$, in qua nulla existit quantitas radicalis.

Extractione radicum possunt etiam ad simpliciorem expressionem æquationes revo-

revocari . Nam quotiescumque omnino notum est quicquid in uno æquationis membro continetur, & in altero reperitur potestas aliqua perfecta; extrahendo ex utraque parte æquationis radicem ejus potestatis, æquatio longè simplicior habebitur. Ita si $x^2 = ab$ sit æquatio, ex aliquo problemate orta, extrahatur utrinque quadrata radix, & fiet $x = \sqrt{ab}$. Similiter si in resolutione alicujus problematis inciderit Analysta in hanc æquationem $x^2 + 2ax + a^2 = ac$, eliciat utrinque quadratam radicem, & habebit loco ejus hanc aliam simpliciorem $x + a = \sqrt{ac}$.

Neque verò æquationes istæ $x = \sqrt{ab}$, & $x + a = \sqrt{ac}$ sunt reducendæ, quia in iis quantitates occurrunt radicales: quippe sciendum, radicales quantitates tunc demum simplicitati æquationum officere, quum in iis incognitæ continentur. Quotiescumque etenim ex solis cognitis constant, nequaquam sunt impedimento, & potest ab iis æquatio vel solius substitutionis ope liberari. Qua ratione ex æquatione $x = \sqrt{ab}$ auferetur quantitas radicalis, ponendo $\sqrt{ab} = c$, quum oriatur $x = c$; & similiter æquatio $x + a = \sqrt{ac}$ libera fiet à quantitate radicali, si ponatur

tur $\sqrt{ac} = b$, quandoquidem loco ejus habebitur hæc alia $x + a = b$.

Sed ut æquatio ad simpliciorem expressionem extractione radicum possit revovari, necesse est interdum utrique membro æquationis aliquid apponere. Sic, ut æquatio $x^2 + 2ax = a^2$ simplicior evadat, addatur ad utramque partem a^2, ita ut fiat $x^2 + 2ax + a^2 = 2a^2$; & jam extrahendo utrinque quadratam radicem, erit $x + a = \sqrt{2a^2}$. Similiter, ut simplicior fiat æquatio ista $x^4 + 2a^2x^2 = 3a^4$, addatur utrinque a^4; & quia evadit $x^4 + 2a^2x^2 + a^4 = 4a^4$, reducetur, extrahendo quadratam radicem ex utraque parte æquationis, ad hanc aliam $x^2 + a^2 = 2a^2$, sive $x^2 = a^2$, quæ fiet simplicissima, si utrinque rursus quadrata radix extrahatur.

Atque hoc artificio jam ex omnibus æquationibus, in quibus incognita ad duas dimensiones ascendit, licebit valorem ejus eruere, ipsarumque adeo æquationum resolutionem obtinere, quod est ultimum Analysis opus. Omnis etenim æquatio, in qua incognita ad duplicem dimensionem attollitur, nullâ signorum, quibus termini afficiuntur, habitâ ratione, potest sub hac forma exhiberi $x^2 + 2ax = b^2$.

Et

Et profectò, si æquationis hujus utrique membro addatur a^2, hoc est quadratum ex semisse quantitatis cognitæ secundi termini; tum utrinque quadrata radix extrahatur, fiet $x + a = \sqrt{a^2 + b^2}$. Sed de resolutione tum istarum, cum aliarum æquationum, velut totius Analysis complemento, fusiùs deinceps agendum.

C A P. II.

Methodus resolvendi problemata exmplis illustratur.

Quum in Arte analytica exemplis magis, quàm præceptis Tyrones adjuventur, altiusque nobis inhæreant, quæ generaliter enunciata, ad specialia applicantur, non abs re fore existimavi, si methodum resolvendi problemata, superiori capite summatim explicatam, aliquibus exemplis, certo consilio electis, in Tyronum gratiam hoc alio capite illustratam exhibeam. Et ut liquidò constet, quàm latè pateat hæc methodus per universam Matheseos disciplinam, exempla proferam, non modò ex Arithmetica, & Geometria deprompta, verùm etiam quæ ad physico-mathematicas scientias pertinere videntur.

Jam

Et siquidẽ ea sit recta docẽdi methodus, quæ progreditur à simplicioribus ad eas quæ magis composita sunt; afferenda sunt primo loco problemata illa, quæ ad Arithmeticam pertinent, quæque circa numeros, sive quantitates abstractas occupantur. Sunt quippe hujuscemodi problemata adeo quidem solutu facilia, ut crediderim tempus terere, qui in eorum solutione ingenii sui vires velit exercere. Statu etenim quæstionis probè intellecto, & impositis ritè nominibus, tum notis, cùm incognitis quantitatibus, eò res tota devolvitur, ut sensus quæstionis sermone, ut ita dicam, algebraico designetur; nam conditiones ejus, ad algebraicos terminos sic translatæ, illico tot dabunt æquationes, quot ei solvendæ sufficiunt.

Hac ratione, si quærantur tres numeri arithmeticè proportionales, ita ut data sit tam summa ipsorum, quàm summa productorum ex singulis binis; considero primum attentè statum quæstionis, & conditiones, quas debent habere numeri quæsiti, sedulò perpendo. Tum quos oportet numeros invenire, voco x, y, z; sed a summam ipsorum, & b^2 summam productorum ex singulis binis. Unde quia tres numeri x, y, z tales esse debent, ut

sint

sint arithmeticè proportionales, ut summa ipsorum sit a, ac denique ut summa productorum ex singulis binis sit b^2, designentur conditiones istæ omnes terminis algebraicis, & habebuntur hoc pacto tres æquationes $x + z = 2y$, $x + y + z = a$, & $xy + xz + yz = b^2$, quarum ope facile erit cujusque incogniti numeri valorem invenire.

Sed non perinde se res habet in resolutione eorum problematum, quæ spectant ad Geometriam. Pendent etenim ut plurimum, quæ in iis quæruntur, à variis linearum positionibus, & relationibus complexis: proindeque ulteriori egent artificio, quo ad algebraicos terminos deduci possint. Nimirum necesse est, ut Analysta Geometriæ calleat elementa, figurarumque geometricarum proprietates & accidentia perspecta habeat, ac explorata, quo possit problemata geometrica ad æquationes revocare. Sed Trigonometria, & Doctrina Datorum neque etiam eum latere debent; nam ut plurimum in calculo peragendo non ea, quæ propriè data sunt, sed quæ ex iis consequuntur, debent adhiberi.

Hæc itaque sunt, quæ resolutionem problematum geometricorum reddunt pau-

paulò difficiliorem. Unde ne ftatim Tyrones noftri animo concidant, exhibeam primùm iis problemata aliquot arithmetica, ut in inveniendis, reducendifque æquationibus aliquantulum inftructi, poffint ad problemata geometrica inoffeſo pede fe cõferre. Sed tam illa, quàm ifta excipient tãdem problemata nonnulla phyfico-mathematica, ut intelligant Tyrones, qua ratione phyfico-mathematicæ difciplinæ poffint etiam calculi algebraici legibus fubmitti.

I.

Problemata Arithmetica.

I. INvenire tres numeros, quorum datæ fint fummæ ex fingulis binis.

Vocetur primus numerorum x, fecundus y, & tertius z. Defignetur autem litterâ a fumma ex primo, & fecundo; litterâ b fumma ex primo, & tertio; & litterâ c fumma ex fecundo, & tertio. Ergo, quia fumma ipforũ x, & y eft a, erit $x + y = a$; pariterque, quia fumma ipforum x, & z eft b, erit $x + z = b$; ac denique, quia fumma ipforum z, & y eft c, erit $y + z = c$. Quocirca defignatis terminis algebraicis fingulis problematis conditionibus, redu-

ducetur problema ad tres istas æquationes $x + y = a$, $x + z = b$, $y + z = c$.

Nunc ex tribus hisce æquationibus deducenda est alia, quæ omnes problematis conditiones includens, unicam tantùm incognitam contineat. Id autem fieri potest in hunc modum. Quoniam in tertia æquatione habetur $y + z = c$, erit transponendo $z = c - y$. Unde si in secunda æquatione $x + z = b$ loco ipsius z substituatur valor ille, erit $x + c - y = b$, hoc est $x + c - b = y$. Denique in prima æquatione $x + y = a$ loco incognitæ y subrogetur valor inventus, & fiet $x + x + c - b = a$, sive $2x = a + b - c$, Unde divisa utraque parte æquationis per 2, habebitur tandem $x = \frac{a + b - c}{2}$.

Invento autem valore unius incognitæ x, valores aliarum incognitarum nullo negotio deducentur. Habetur etenim in secunda æquatione $x + z = b$, sive $z = b - x$. Itaque si in ea loco incognitæ x ponatur valor invetus, fiet $z = \frac{b + c - a}{2}$

Et similiter, quia in tertia æquatione habe-

betur $y + z = c$, hoc est $y = c - z$, si in ea loco incognitæ z substituatur valor inventus, fiet $y = \frac{a + c - b}{2}$. Unde tres numeri, quos oportet invenire, erunt $\frac{a + b - c}{2}$, $\frac{a + c - b}{2}$, & $\frac{b + c - a}{2}$.

Possunt tres isti numeri ex tribus illis æquationibus inveniri etiam hoc artificio. Quoniam æquationes, ad quas problema reductum est, sunt $x + y = a$, $x + z = b$, $y + z = c$, addantur inter se mutuò subinde æquationes illæ, ut ex omnibus incognitis fiat summa una, & summa alia ex omnibus cognitis. Erit itaque $2x + 2y + 2z = a + b + c$. Sed quum in tertia æquatione habeatur $y + z = c$, duplicando terminos omnes, erit $2y + 2z = 2c$. Quare, si in illa æquatione loco terminorum $2y + 2z$ ponatur $2c$, fiet $2x + 2c = a + b + c$, hoc est $2x = a + b - c$, & consequenter $x = \frac{a + b - c}{2}$: nec dissimiliter aliarum incognitarum valores invenientur.

Quod si denominatio incognitarum fieri

ri velit secundùm ipsas conditiones, appositas in problemate, obtineri poterit problematis resolutio multo faciliùs in hunc modum. Vocetur rursus a summa ex primo, & secundo; b summa ex primo, & tertio; & c summa ex secundo, & tertio. Ergo si primus dicatur x, quia summa ipsius cum secundo est a, summa autem ipsius cum tertio est b; erit $a - x$ secundus, $b - x$ tertius, & $a + b - 2x$ summa ex secundo, & tertio. Erat autem c summa ex secundo, & tertio: Quare instituta æqualitate inter has duas expressiones, habebitur æquatio $c = a + b - 2x$, hoc est $2x = a + b - c$, & consequenter $x = \frac{a + b - c}{2}$, prorsus ut supra.

Jam, ut indefinitam hujus problematis resolutionem exemplo uno, aut altero illustremus; ponamus, quod summa ex primo, & secundo sit 10; quod summa ex primo, & tertio sit 8; ac denique, quod summa ex secundo, & tertio sit 6. Erit itaque $a = 10$, $b = 8$, & $c = 6$. Unde quum sit $a + b - c = 12$, $a + c - b = 8$, & $b + c - a = 4$; capiendo semisses istorum numerorum, fient numeri quæsiti 6, 4, 2. Atque ita quoque si summa

ma ex primo, & secundo sit 12, summa ex primo, & tertio 14, & summa ex secundo, & tertio 10; erit primus numerorum 8, secundus 4, & tertius 6.

II. Invenire tres numeros, quorum data sint producta ex singulis binis.

Esto x primus numerorum, y secundus, & z tertius. Vocetur autem a^2 productum ex primo, & secundo; b^2 productum ex primo, & tertio; & c^2 productum ex secundo, & tertio. Itaque, quia id, quod oritur ex multiplicatione ipsorum x, & y, est a^2, erit $xy = a^2$. Pariterque, quia id, quod gignitur ex multiplicatione ipsorum x, & z, est b^2, erit $xz = b^2$. Atque ita quoque, quia id, quod producitur, multiplicando y per z, est c^2, erit $yz = c^2$. Unde translatis in hunc modum ad algebraicos terminos singulis problematis conditionibus, erunt $xy = a^2$, $xz = b^2$, & $yz = c^2$ æquationes, ex quibus problematis solutio deducenda.

Ex his ergo tribus æquationibus eruenda est alia, quæ omnes problematis conditiones includens, unicam tantùm incognitam comprehendat. Hoc autem obtineri potest hac arte. Quoniam in tertia æquatione habetur $yz = c^2$, erit, divi-

dendo utrumque terminum per y, $z = \frac{c^2}{y}$.
Unde, si in secunda æquatione $xz = b^2$, loco ipsius z substituatur valor ille, erit $\frac{c^2x}{y} = b^2$, hoc est $c^2x = b^2y$, sive etiã $\frac{c^2x}{b^2} = y$. Deniq; in prima æquatione $xy = a^2$ loco incognitæ y subrogetur valor inventus, & fiet $\frac{c^2x^2}{b^2} = a^2$, sive $c^2x^2 = a^2b^2$. Unde divisâ utrâque parte æquationis per c^2, & extractâ utrinque quadratâ radice, habebitur æquatio $x = \frac{ab}{c}$, quæ valorem nobis exhibet incognitæ x.

Cognito valore incognitæ x, valores aliarum incognitarum facile erit determinare. Quoniam enim in secunda æquatione habetur $xz = b^2$, sive $z = \frac{b^2}{x}$, si in ea loco incognitæ x ponatur valor inventus, fiet $z = \frac{bc}{a}$. Et similiter, quia

in tertia æquatione habetur $yz = c^2$, hoc est $y = \frac{c^2}{z}$, si in ea loco incognitæ z substituatur inventus valor, fiet $y = \frac{ac}{b}$.

Unde tres numeri in problemate quæsiti erunt $\frac{ab}{c}, \frac{bc}{a}, \frac{ac}{b}$.

Possunt tres isti numeri inveniri etiam hoc alio artificio. Quoniam æquationes, ex problematis conditionibus deductæ, sunt $xy = a^2$ $xz = b$, & $yz = c^2$, multiplicentur inter se mutuò subinde æquationes illæ, ut ex omnibus incognitis fiat productum unum, & productum alterum ex omnibus cognitis. Erit itaque $x^2 y^2 z^2 = a^2 b^2 c^2$, sive etiam $xyz = abc$. Sed quum in tertia æquatione habetur $yz = c^2$, substituendo in æquatione illa c^2 loco ipsius yz, fiet $c^2 x = abc$, sive $cx = ab$. Quare divisâ utrâque parte æquationis per c, habebitur, ut supra, $x = \frac{ab}{c}$; nec dissimiliter valores aliarum incognitarum poterunt determinari.

Quod si nomina quantitatibus incogni-

gnitis imponantur secundùm ipsas conditiones, appositas in problemate, obtineri poterit problematis resolutio multò faciliùs hac ratione. Vocetur rursus a^2 productum ex primo, & secundo; b^2 productum ex primo, & tertio; & c^2 productum ex secundo, & tertio. Itaque si primus dicatur x, quia productum ejus per secundum est a^2, productum verò ejus per tertium est b^2; erit $\frac{a^2}{x}$ secundus, $\frac{b^2}{x}$ tertius, & $\frac{a^2b^2}{x^2}$ productum ex secundo, & tertio. Erat autem c^2 productum ex secundo, & tertio. Quare institutâ æqualitate inter duas istas expressiones, habebitur æquatio $\frac{a^2b^2}{x^2} = c^2$, quæ reducitur ad hanc aliam $x = \frac{ab}{c}$.

Cæterùm, ut hujus problematis resolutionem generalem exemplo aliquo specialem reddamus, ponatur, quod productum ex primo, & secundo sit 10; productum ex primo, & tertio sit 12; ac denique productum ex secundo, & tertio sit 15. Erit itaque $a^2 = 10$, $b^2 = 12$, & $c^2 = 15$.

Unde quum sit $a=\sqrt{10}$, $b=\sqrt{12}$, & $c=\sqrt{15}$, erunt tres numeri quæsiti $\sqrt{8}$, $\sqrt{\frac{25}{2}}$, $\sqrt{18}$. Sed si ponatur $a^2=9$, $b^2=36$, & $c^2=4$; quia fiet $a=3$, $b=6$, & $c=2$, erunt tres numeri quæsiti 9, 1, 4.

III. Invenire tres numeros geometricè proportionales, ita ut datæ sint differentiæ majoris à minoribus.

Vocetur primus, & major numerorum x; secundus, & minor y; tertius, & minimus z. Designetur autem litterâ a differentia primi à secundo, & litterâ b differentia primi à tertio. Itaque, quia tres numeri x, y, z sunt geometricè proportionales, erit $xz=yy$. Et quoniam x major est, quàm y, quantitate cognitâ a, erit $x=y+a$. Et denique quia x superat z quantitate cognitâ b, erit $x=z+b$. Quare designato statu quæstionis sermone algebrico, reducetur problema ad tres istas æquationes $xz=yy$, $x=y+a$, & $x=z+b$.

Ex his autem æquationibus ea, quæ omnes problematis cõditiones includens, unicam contineat incognitam quantitatem, in hunc modum erui poterit. Quoniam

niam in secunda æquatione habetur $x = y + a$, erit $x - a = y$; atque adeo, quadrando utramque partem æquationis, erit $x^2 - 2ax + a^2 = y^2$. Sed in prima æquatione habetur $xz = y^2$. Quare erit $x^2 - 2ax + a^2 = xz$. Jam verò, quum in tertia æquatione habeatur $x = z + b$, erit $z = x - b$. Itaque si in postrema æquatione loco quantitatis incognitæ z ponatur valor ejus $x - b$, habebitur hæc alia $x^2 - 2ax + a^2 = x^2 - bx$, ex qua infertur $x = \frac{a^2}{2a - b}$.

Invento valore incognitæ x, valores aliarum incognitarum nullo negotio invenientur. Nam quantitas incognita x major est, quàm y, quantitate cognitâ a. Ergo si ex invento valore subducatur a, relinquetur valor incognitæ y. Et similiter, quia incognita quantitas x superat aliam z quantitate cognitâ b, si ex eodem illo valore subtrahatur b, remanebit valor incognitæ z. Hinc monitum lectorem velim, quod quum in aliquo problemate plures occurrunt incognitæ quantitates, præstat eam primùm invenire, ex qua omnes aliæ facilè deducuntur.

Quod si denominatio quantitatum in-

cognitarum fieri velit secundùm conditiones, appositas in problemate, pervenietur ad æquationem, unicam incognitam continentem, multò faciliùs in hunc modum. Designet rursus a excessum primi à secundo, & b excessum primi à tertio. Ergo si primus dicatur x, erit $x - a$ secundus, & $x - b$ tertius. Debent autem esse tres numeri inveniendi geometricè proportionales. Quare erit, ut x ad $x - a$, ita $x - a$ ad $x - b$: proindeque, quum productum ex mediis æquale sit producto ex extremis, erit $x^2 - 2ax + a^2 = x^2 - bx$: unde rursus infertur $x = \frac{a^2}{2a - b}$.

Ponamus, exempli causa, quod excessus primi supra secundum sit 10, excessus verò primi supra tertium sit 15. Erit itaque $a = 10$, & $b = 15$. Unde quum a^2 sit 100, & $2a - b = 20 - 15 = 5$; diviso 100 per 5, fiet prior numerus 20; à quo si auferas 10, habebis pro secundo 10; si verò auferas 15, habebis pro tertio 5. Erunt ergo numeri quæsiti 20, 10, 5. Atque ita quoque si a, sive primi supra secundum excessus sit 6; & b, sive excessus primi supra tertium sit 3, erunt numeri inveniendi 4, $-$ 2, 1.

IV.

IV. Invenire duos numeros, quorum data sit summa quadratorum, datumque, quod eorum multiplicatione producitur.

Esto x numerus prior, & y numerus alter. Sit autem $2a^2$ summa quadratorum ex iis, & b^2 id, quod gignitur, mutua eorum multiplicatione. Quia ergo quadrata numerorum x, & y simul addita, conficiunt $2a^2$; erit $x^2 + y^2 = 2a^2$. Et quoniam id, quod oritur, multiplicando eosdem numeros x, & y, est b^2; erit $xy = b^2$. Unde designatis terminis algebraicis singulis conditionibus problematis, reducetur problema ad duas istas æquationes $x^2 + y^2 = 2a^2$, & $xy = b^2$.

Jam, ut ex duabus istis æquationibus tertiam eliciam, quæ omnes problematis conditiones includens, unicam tantùm contineat incognitam quantitatem, multiplico prioris æquationis $x^2 + y^2 = 2a^2$ terminos omnes per x^2, ut loco ejus habeatur hæc alia $x^4 + y^2 + x^2 = 2a^2 + x^2$. Et quoniam in secunda æquatione habetur $xy = b^2$, quadrando ejus utramque partem, fiet $x^2y^2 = b^4$. Unde si in altera illa æquatione $x^4 + x^2y^2 = 2a^2x^2$ loco termini x^2y^2 ponatur valor ejus b^4, evadet illa $x^4 + b^4 = 2a^2x^2$, quæ unicam quan-

quantitatem incognitam continet.

Ut autem ex hac æquatione erui possit valor ipsius x, fiat primò in ea legitima terminorum transpositio, ita ut evadat $x^4 - 2a^2x^2 = -b^4$; tum ad ejus utramque partem addatur a^4, scilicet quadratum ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ, ut fiat $x^4 - 2a^2x^2 + a^4 = a^4 - b^4$; porro extrahatur utrinque quadrata radix, & erit $x^2 - a^2 = \sqrt{a^4 - b^4}$, sive $x^2 = a^2 + \sqrt{a^4 - b^4}$: & extractâ rursus ex utraque parte hujus æquationis quadratâ radice, habebitur tandem $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2}}$.

Poterat hìc idem valor quantitatis incognitæ x inveniri etiam hoc artificio. Quoniam in secunda æquatione habetur $xy = b^2$, duplicando utramque partem, erit $2xy = 2b^2$. Sed in prima æquatione habetur $x^2 + y^2 = 2a^2$. Quare erit $x^2 + 2xy + y^2 = 2a^2 + 2b^2$, & $x^2 - 2xy + y^2 = 2a^2 - 2b^2$. Unde extrahendo quadratas radices ex partibus utriusque æquationis, erit $x + y = \sqrt{2a^2 + 2b^2}$, & $x - y = \sqrt{2a^2 - 2b^2}$. Unde quia ex

ex additione illarum oritur hæc alia $2x = \sqrt{a^2 + 2b^2} + \sqrt{2a^2 - 2b^2}$, fiet tandem $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2}}$, prorsus, ut supra.

Invento valore magnitudinis incognitæ x, valor alterius incognitæ y facili negotio invenitur. Quum enim id, quod oritur ex multiplicatione mutua ipsarũ, fit b^2; si dividatur b^2 per inventũ valorẽ, habebitur valor incognitæ y. Hunc verò valorem esse $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} - \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2}}$, perspicuum quidem est. Habetur enim $x + y = \sqrt{2a^2 + 2b^2}$, & $x - y = \sqrt{2a^2 - 2b^2}$. Itaque subtrahendo æquationem istam ex illa fiet $2y = \sqrt{2a^2 + 2b^2} - \sqrt{2a^2 - 2b^2}$, eritque adeo $y = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} - \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2}}$.

Ponamus, exempli gratia, quod summa quadratorum ex numeris inveniendis sit 20; id verò, quod producitur ex mutuâ eorum multiplicatione sit 8. Erit itaque $2a^2 = 20$, & $b^2 = 8$. Unde quum

a^2

$a^2 + b^2$ sit 18, & $a^2 - b^2$ sit 2; erunt semisses istarum quantitatum 9, & 1; quumque radices quadratæ harum semissium sint 3, & 1, fient numeri quæsiti $3 + 1$, sive 4, & $3 - 1$, sive 2. Atque ita quoque, si ponatur summa quadratorum ex numeris inveniendis, hoc est $2a^2 = 16$, & productum ex eorum multiplicatione mutuâ, hoc est $b^2 = 10$, erunt numeri quæsiti $3 + \sqrt{-1}$, & $3 - \sqrt{-1}$.

V. Invenire duos numeros, ita ut data sit tum summa ipsorum, cùm summa cuborum, qui fiunt ex iis.

Esto x numerus unus, & y numerus alter. Designet autem a summam ipsorum: & ab^2 summam cuborum, qui fiunt ex iis. Itaque quia summa numerorum x, & y est a, erit $x + y = a$. Et quoniam summa cuborum, qui fiunt ex iisdem numeris, est ab^2, erit $x^3 + y^3 = ab^2$. Unde designatis sermone algebrico singulis conditionibus, appositis in problemate, reducetur problema ipsum ad duas istas æquationes $x + y = a$, & $x^3 + y^3 = ab^2$.

Ex his ergo æquationibus deducenda est tertia, quæ includens omnes problematis conditiones, unicam tantùm incognitam comprehendat. Id autem fiet hac arte.

arte. Quoniam in prima æquatione habetur $x + y = a$, erit $y = a - x$, atque adeo attollendo utramque partem æquationis ad cubum, sive tertiam potestatem fiet $y^3 = a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3$. Quocirca si in secunda æquatioue $x^3 + y^3 = ab^2$ loco termini y^3 valor ejus substituatur, habebitur $x^3 + a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3 = ab^2$, sive $a^2 - 3ax + 3x^2 = b^2$, quæ quidem æquatio legitimè reducta, ac resoluta dabit valorem ipsius x; eoque invento valor alterius incognitæ y per primam problematis conditionem nullo negotio invenietur.

VI. Invenire duos numeros, ita ut data sit tam summa quadratorum, quàm summa cuborum ex iis.

Vocetur x numerus unus, & y numerus alter. Designet autem a^2 summam quadratorum, & a^2b summam cuborum ex iis. Itaque, quia quadrata numerorum x, & y simul addita conficiunt a^2, erit $x^2 + y^2 = a^2$. Et quoniam summa cuborum ex iisdem numeris est a^2b, erit $x^3 + y^3 = a^2b$. Quare designato statu quæstionis terminis algebraicis, erunt $x^2 + y^2 = a^2$, & $x^3 + y^3 = a^2b$ æquationes, ad quas problema propositum reducitur.

Et quoniam in prima æquatione habetur

tur $x^2 + y^2 = a^2$; erit $y^2 = a^2 - x^2$: quare, elevando utramque partem æquationis ad cubum, five tertiam poteſtatem, erit $y^6 = a^6 - 3a^4x^2 + 3a^2x^4 - x^6$. Pariterque quia in ſecunda æquatione habetur $x^3 + y^3 = a^2b$, erit $y^3 = a^2b - x^3$: quare elevando utramque partem æquationis ad quadratum, five ſecundam poteſtatem, erit $y^6 = a^4b^2 - 2a^2bx^3 + x^6$. Erat autem $y^6 = a^6 - 3a^4x^2 + 3a^2x^4 - x^6$. Quare erit $a^6 - 3a^4x^2 + 3a^2x^4 - x^6 = a^4b^2 - 2a^2bx^3 + x^6$, quæ quidem æquatio legitimè reducta, ac reſoluta incognitæ x valorem exhibebit.

II.

Problemata Geometrica.

Fig. 9. I. IN triangulo rectangulo BAC, datâ hypothenusâ BC, & perpendiculo AD, invenire ſegmenta BD, DC.

Ponatur hypothenuſa BC $= a$, perpendiculum AD $= b$, & ſegmentum unum BD $= x$. Erit ergo ſegmentum alterum DC $= a - x$. Et quoniam triangulum BAC rectum habet angulum in A, erit perpendiculum AD medio loco proportionale inter ſegmenta BD, DC. Quare erit

erit ut BD ad DA, ita DA ad DC, hoc est in terminis algebraicis, ut x ad b, ita b, ad $a-x$. Unde, quia rectangulum sub extremis æquale est ei, quod sub mediis continetur, erit $ax - x^2 = b^2$ æquatio, ad quam reducitur problema propositum.

Eadem æquatio potest etiam inveniri hac alia ratione. Triangulum ADB rectum habet angulum in D: quare erit quadratum hypothenusæ AB æquale quadratis crurum AD, BD. Est autem quadratum ex AD $= b^2$, & quadratum ex BD $= x^2$. Itaque erit quadratum ex AB $= x^2 + b^2$. Et quoniam triangulum BAC est rectangulum in A, erit latus AB medio loco proportionale inter hypothenusam BC, & segmentum, quod ei adjacet, BD. Quare erit AB quadratum æquale rectãgulo BDC. Est autem in terminis algebraicis quadratum ex AB $= x^2 + b^2$, & rectangulum DBC $= ax$. Igitur institutâ æqualitate inter has duas quantitates, fiet æquatio $ax = x^2 + b^2$, hoc est $ax - x^2 = b^2$.

Sed ad eandem æquationem aliâ rursus ratione potest perveniri: nimirum quia triangulum ADB rectum habet angulum in D, erit AB quadratum æquale AD, BD quadratis: proindeque, quia quadratum

tum ex AD est b^2, & quadratum ex BD est x^2, erit quadratum ex AB $= x^2 + b^2$. Similiter, quia triangulum ADC rectum habet angulum in D, erit quadratum ex AC æquale AD, DC quadratis; proindeque, quia quadratum ex AD est b^2, & quadratum ex DC est $a^2 - 2ax + x^2$, erit quadratum ex AC $= b^2 + a^2 - 2ax + x^2$. Jam verò, propter triangulum BAC rectangulum in A, quadratum hypothenusæ BC est æquale quadratis crurum AB, AC. Itaque, quia in terminis algebraicis quadratum ex BC est a^2, quadratum ex AB est $x^2 + b^2$, & quadratum ex AC est $b^2 + a^2 - 2ax + x^2$, erit æquatio $a^2 = x^2 + b^2 + b^2 + a^2 - 2ax + x^2$, x^2, hoc est, legitimâ reductione peractâ, $ax - x^2 = b^2$.

FIG. 10. II. In parallelogrammo ABCD datis lateribus omnibus, & diagonali AC, invenire diagonalem alteram BD.

Super latere AB producto si opus demittantur perpendicula BE, CF. Et quoniam propter parallelas AB, DC angulus BAE æqualis est angulo CDF; triangula duo rectangula BEA, CFD similia erunt, & æqualia inter se; proindeque non modò erit AB æqualis DC, BE æqualis CF, verùm etiam AE æqualis DF.

Po-

Ponatur itaque latus AB, sive DC $= a$, latus BC, sive AD $= b$, & diagonalis data AC $= c$. Ponatur autem diagonalis quæsita BD $= x$, & portio AE, sive DF $= y$. Erit ergo DE $= b + y$, & AF $= b - y$. Et quoniam triangulum BEA rectum habet angulum in E, erit AB quadratum æqnale AE, BE quadratis. Quare si ex AB quadrato auferatur AE quadratum, supererit BE, sive CF quadratum. Est autem quadratum ex AB $= a^2$, & quadratum ex AE $= y^2$. Itaque erit quadratum ex BE, sive CF $= a^2 - y^2$.

Porro quia triangulum BED est rectangulum in E, erit BD quadratum æquale BE, DE quadratis. Sed in terminis algebraicis BD quadratum est x^2, BE quadratum est $a^2 - y^2$, & DE quadratum est $b^2 + 2by + y^2$. Quare erit $x^2 = a^2 - y^2 + b^2 + 2by + y^2$, hoc est $x^2 = a^2 + b^2 + 2by$, sive etiam $x^2 - a^2 - b^2 = 2by$.

Ulteriùs, quia triangulum AFC rectum habet angulum in F, erit AC quadratum æquale AF, CF quadratis. Jam verò in terminis algebraicis quadratum ex AC est c^2, quadratum ex AF est $b^2 - 2by + y^2$, & quadratum ex CF est $a^2 - y^2$. Itaque erit $c^2 = b^2 - 2by + y^2 + a^2 - y^2$, hoc est $c^2 = b^2 - 2by + a^2$, sive etiam

$2by = b^2 + a^2 - c^2$.

Erat autem $2by = x^2 - a^2 - b^2$. Quare erit $x^2 - a^2 - b^2 = a^2 + b^2 - c^2$, hoc eſt $x^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$: ex quo patet quadratum diagonalis quæſitæ æquale eſſe ei, quod remanet, ſi ex quadratis laterum ſubducatur quadratum datæ diagonalis, ut hinc inferre liceat hoc theorema, longè quidem univerſaliùs theoremate pythagorico: In omni parallelogrammo quadrata laterum omnium æqualia ſunt quadratis diagonalium.

Nec abs re erit theorematis hujus adeo univerſaliùs ſyntheticam demonſtrationem, Euclideo more compoſitam, hoc loco proferre: nimirum, quia triangulum BAD obtuſum habet angulum in A, erit ex elementis quadratum ex BD æquale quadratis AB, AD unà cum duplo rectanguli DAE: quare appoſito communi quadrato AC, erunt quadrata duo BD, AC æqualia tribus quadratis AB, AD, AC unà cum duplo rectanguli DAE, ſive ADF. Sed propter triangulum ADC acutangulum in D, quadratum ex AC unà cum duplo rectanguli ADF eſt æquale quadrato ex DC, unà cum quadrato ex AD, ſive CB. Igitur quadrata duo BD, AC æqualia erunt quatuor quadratis

AB,

AB, AD, DC, CB.

III. In quadrilatero ABCD, inſcripto in circulo, datis lateribus omnibus, & diagonali unâ BD, invenire diagonalem alteram AC. Fig. 11.

Fiat angulus CBE æqualis angulo ABD. Et quoniam angulus BCA æqualis eſt angulo BDA; æquiangula erunt triangula BEC, BAD. Quare erit, ut BC, ad CE, ita BD ad DA. Unde, ſi ponatur BC $= a$, BD $= b$, DA $= c$, & CE $= x$; erit in terminis algebraicis, ut a ad x, ita b ad c: proindeque erit $x = \frac{ac}{b}$.

Et quoniam angulus CBE æqualis eſt angulo ABD, appoſito (vel ablato) communi DBE, erit angulus CBD æqualis angulo ABE. Unde, quia angulus BAC æqualis eſt angulo BDC, æquiangula erunt triangula AEB, DBC; eritque adeo, ut AB ad AE, ita BD ad DC. Quare, poſitis AB $= d$, DC $= f$, & AE $= y$; erit rurſus in terminis algebraicis, ut d ad y, ita b ad f: proindeque erit $y = \frac{df}{b}$.

Ponatur nunc diagonalis tota AC $= z$. Et quoniam ſegmenta AE, EC ſimul ſum-

pta conficiunt ipſam AC; erit $z = x + y$. Unde, ſi in hac æquatione loco incognitarum x, & y ponantur ipſarum valores, habebitur loco ejus hæc alia $z = \frac{ac + df}{b}$, quæ dabit valorem quæſitæ diagonalis AC.

Jam ſi in hac poſtrema æquatione, ad quam reducitur problema propoſitum, multiplicentur termini omnes per b, habebitur hæc alia $bz = ac + df$. Unde, quia bz eſt rectangulum ſub diagonalibus, & ac, df ſunt rectangula ex lateribus oppoſitis; deducetur exinde hoc theorema, quod rectangulum ſub diagonalibus adæquet ſummam illorum, quæ fiunt ex lateribus oppoſitis.

Hujuſmodi theorema protulit primus omnium Ptolomeus. Et quoniam, quum agitur de figuris inſcriptis in circulo, non rarò illud ſubveniet; non abs re erit, ejuſdem theorematis demonſtrationem ſyntheticam, Euclideo more compoſitam, afferre; eoque magis, quod ex iiſdem illis, quæ pro reſolutione propoſiti problematis oſtenſa ſunt, ſua ſponte deducatur.

Nimirum, quia propter ſimilitudinem trangulorum BEC, BAD, BC eſt ad CE, ut

ut BD ad DA; erit rectangulum ex BC in DA æquale rectangulo ex BD in CE. Et similiter, quia propter triangula similia AEB, DBC, AB est ad AE, ut BD ad DC; erit rectangulum ex AB in DC æquale rectangulo ex BD in AE. Unde rectangulum ex BC in DA unà cum rectangulo ex AB in DC æquale erit rectangulo ex BD in CE unà cum rectangulo ex BD in AE. Sed duo ista rectangula æqualia sunt ei, quod fit ex BD in AC. Itaque rectangulum ex AB in DC unà cum rectangulo ex BC in DA æquale erit rectangulo ex BD in AC.

IV. Ex dato puncto D ducere rectam DBC, quæ cum aliis duabus AB, AC, positione datis, triangulum constituat ABC datæ magnitudinis. Fig. 12.

Ponatur jam factum, & ducatur per punctum D recta DE parallela ipsi AB. Ergo, quia datur punctum D, & datur quoque positione recta AB, dabitur etiam AF distantia parallelarum AB, DE. Unde, quia propter lineas positione datas AB, AC datur angulus BAC, sive DEC; dabuntur in triangulo AEF anguli omnes; & consequenter, quum detur latus unum AF, dabitur quoque per Trigonometriã hypothenusa AE. Denique, quia datur

punctum D, & datur quoque positione recta AC, dabitur etiam perpendiculum DG, quod metitur distantiam puncti D à rectâ AC.

Itaque demittatur perpendicularis BH, & ponantur $AE = a$, $DG = c$, $AC = x$, & $BH = y$. Erit ergo tota $CE = a + x$. Et quoniam, propter similitudinem triangulorum CBA, CDE, AC est ad CE, ut AB ad DE; itemque, propter triangula similia ABH, EDG, AB est ad DE, ut BH ad DG; erit ex æquali, ut AC ad CE, ita BH ad DG. Unde, quum sit in terminis algebraicis, ut x ad $a + x$, ita y ad c, habebitur per notissimam quantitatum proportionalium proprietatem æquatio $ay + xy = cx$.

Et quoniam, si basis AC multiplicetur per perpendiculum BH, producitur duplum areæ trianguli ABC: proinde si area istius trianguli, velut data, vocetur bc, habebitur hæc alia æquatio $xy = 2bc$. Unde designatis terminis algebraicis singulis conditionibus, in problemate appositis, reducetur problema ipsum ad duas istas æquationes $ay + xy = cx$, & $xy = 2bc$, ex quibus deducenda est tertia, quæ singulas problematis conditiones includens, nonnisi unicam incognitam comprehendat.

Ad

Ad hanc autem commodè deducendam, multiplicentur prioris æquationis termini omnes per x, & habebitur loco ejus hæc alia $axy + x^2y = cx^2$. Jam verò in secunda æquatione habetur $xy = 2bc$. Quocirca si in illa æquatione ponatur $2bc$, ubicumque reperitur xy, fiet tandem $2abc + 2bcx = cx^2$, sive $2ab + 2bx = x^2$, quæ resoluta juxta regulas artis dabit valorem quantitatis incognitæ x.

Quod si locus puncti dati fuerit in recta AB, positione data, veluti in B, tunc longè simplicior erit æquatio, ad quam problema reducitur. Etenim, quum hoc casu detur perpendiculum BH, siquidem ponatur $BH = c$, & $AC = x$, fiet æquatio quæsita $cx = 2bc$, sive etiam $x = 2b$. Quæ quidem æquatio colligi quoq; potest ex illa ipsa superiùs inventa $2ab + 2bx = x^2$. Nam, quum perpendiculum DG coincidit cum perpendiculo BH, cadet etiam recta DE super recta AB: proindeque quia evanescit recta $AE = a$, satis erit in illa æquatione delere terminum $2ab$: quo facto, relinquetur $2bx = x^2$, hoc est $2b = x$.

V. Dato quadrato ABCD, producere latus AB in directum versus E, ita ut junctà DE, fiat intercepta portio EF da- Fig. 13.

tæ magnitudinis.

Ponatur jam factum, & sit AB, sive AD $= a$, EF $= c$, BE $= x$, & BF $= y$. Erit ergo tota AE $= a + x$. Et quoniam similia sunt triangula ADE, BFE, erit ut AD ad BF, ita AE ad BE. Unde quum sit in terminis algebraicis, ut a ad y, ita $a + x$ ad x; habebitur per notissimam quantitatum proportionalium proprietatem æquatio $ax = ay + xy$.

Et quoniam triangulum EBF rectum habet angulum in B, erit quadratum hypothenusæ EF æquale quadratis crurum BE, BF. Unde, quia per ea, quæ superiùs posita sunt, quadratum ex EF est c^2, quadratum ex BE est x^2, & quadratum ex BF est y^2, institutâ æquatione, habebitur $c^2 = x^2 + y^2$: & propterea propositum problema reducetur ad duas istas æquationes $ax = ay + xy$, & $c^2 = x^2 + y^2$.

Ut autem ex duabus istis æquationibus tertiam eruamus, quæ includens omnes problematis conditiones, unicam incognitam comprehendat, elevetur prioris æquationis $ax = ay + xy$ pars utraque ad quadratum, sive secundam potestatem, & fiet $a^2 x^2 = a^2 y^2 + 2ax y^2 + x^2 y^2$. Unde quia in secunda æquatione habetur

$c^2 = x^2 + y^2$, & consequenter $c^2 - x^2 = y^2$, si ponatur in illa $c^2 - x^2$, ubicumque occurrit y^2, habebitur hæc alia æquatio $a^2x^2 = a^2c^2 - a^2x^2 + 2ac^2x - 2ax^3 + c^2x^2 - x^4$; quæ ordinata, per legitimam reductionem, fiet $x^4 + 2ax^3 + 2a^2x^2 - c^2x^2 - 2ac^2x = a^2c^2$.

Potest etiam problema resolvi, quærendo valorem lineæ DE: nimirum positis adhuc AB, sive AD $= a$; & EF $= c$, ponatur DE $= x$. Et quoniam DE est ad EF, ut AD ad BF, si fiat, ut x ad c, ita a ad quartam, invenietur BF $= \frac{ac}{x}$. Et similiter, quoniam DF est ad EF, ut AB ad BE, si fiat ut $x - c$ ad c, ita a ad quartam, invenietur BE $= \frac{ac}{x-c}$. Unde, quia triangulū EBF rectū habet angulū in B, adeoque quadratū hypothenusæ EF est æquale quadratis crurū BE, BF; habebitur æquatio $c^2 = \frac{a^2c^2}{x^2} + \frac{a^2c^2}{x^2 - 2cx + c^2}$, quæ legitimè reducta, ac ordinata evadet $x^4 - 2cx^3 + c^2x^2 - 2a^2x^2 + 2a^2cx = a^2c^2$.

Præſtat autem in reſolutione problematis quærere potius valorem lineæ DE, quàm BE. Nam quærendo valorem lineæ BE obtinetur æquatio, ex qua non ita facile ille valor eruitur. Sed quærendo valorem lineæ DE incidimus in æquationem, ex qua nullo negotio quæſitus valor infertur. Eſt enim æquatio, continens valorem ipſius DE, $x^4 - 2cx^3 + c^2x^2 - 2a^2x^2 + 2a^2cx = a^2c^2$, quæ talis quidem deprehenditur, ut ſi ad ejus utramque partem addatur a^4, fiet pars prior quadratum perfectum: adeoque ponendo $c^2 + a^2 = b^2$, & extrahendo hinc inde quadratam radicem, fiet $x^2 - cx - a^2 = ab$, ſive $x^2 - cx = a^2 + ab$, quæ rurſus ſi reſolvatur per regulam ſuperiùs traditam, habebitur valor incognitæ x.

Sed adhuc ſimplicior futura erit reſolutio æquationis, ad quam problema reducitur, ſi ſectâ EF bifariam in puncto G, quæratur valor lineæ DG. Nam poſitis AB, ſive AD $= a$, & EG, ſive GF $= b$, ſi ponatur DG $= x$, prodibit æquatio $x^4 - 2a^2x^2 - 2b^2x^2 + b^4 = 2a^2b^2$, quæ evadet $x^4 - 2a^2x^2 - 2b^2x^2 + b^4 + a^4 + 2a^2b^2 = 4a^2b^2 + a^4$ ſi utrique ejus parti addatur $a^4 + 2a^2b^2$. Quare ponendo $4b^2 + a^2 = c^2$, & extrahendo utrin-

utrinque quadratam radicem, fiet $x^2 - a^2 - b^2 = ac$, five $x^2 = a^2 + b^2 + ac$. Unde extracta rurfus ex utraque parte alterius hujus æquationis quadratâ radice, obtinebitur tandem valor incognitæ $x = \sqrt{a^2 + b^2 + ac}$.

Cæterû in refolutione propofiti problematis, five quæratur valor lineæ BE, aut AE, five valor lineæ DE, aut DG; femper quidem talis prima facie prodibit æquatio, ut in ea maxima incognitæ poteftas ad quatuor dimenfiones afcendat: ejufdemque formæ erit etiam æquatio, fi quæratur valor lineæ BF, aut CF, quarum utraque problema quoque determinat. Interim poterit idem problema per tales quoque lineas determinari, ut æquationes, valores illarum linearum continentes, ftatim duarum dimenfionum oriantur. Quod ut Tyronibus noftris fiat palam, illud hìc oftendere non gravabimur, concipiendo etiam problema paulò aliter in hunc modum.

VI. Angulum rectum EBF fubtendere rectâ datâ EF, quæ tranfeat per datum punctum D, æquidiftans à lineis, rectum angulum comprehendentibus.

Ponatur jam factum, & fectâ EF bifariam in puncto G, jungantur rectæ BG, LB,

BD, Quia ergo angulus EBF rectus est, ſemicirculus deſcriptus ſuper recta EF tranſibit per punctum B; proindeque tres rectæ lineæ BG, EG; FG æquales erunt inter ſe. Unde, quia punctum G eſt in circumferentiâ circuli, qui deſcribitur centro B, & intervallo ſemiſſis ipſius EF; ſi ſuper BD demittatur perpendicularis GH, quæri poteſt in reſolutione problematis valor rectæ DH, quippe quæ determinat problema, ſi deſcripto circulo illo, erigatur ex puncto H recta ipſi DH perpendicularis, quæ circumferentiam illius circuli alicubi ſecet.

Jam ad inveniendum valorem rectæ DH, conſidero conditionem alteram, appoſitam in problemate, nimirum quod punctũ D æquediſtet à rectis AE, BC, comprehendentibus angulum rectum EBF. Hinc enim ſequitur, angulum ABD ſemirectum eſſe, atque adeo angulum HBI æqualem eſſe angulo BIH, ſive EIG. Unde, quia angulus EBG æqualis eſt angulo BEG, erit totus angulus GBH æqualis duobus angulis EIG, BEG. Sed duobus iſtis angulis velut interioribus, & oppoſitis æqualis eſt angulus exterior DGH. Quare erit angulus GBH æqualis angulo DGH, & conſequenter triangula duo re-

rectangula DHG, GHB æquiangula erunt.

Et quoniam triangula æquiangula latera habent circum æquales angulos proportionalia; erit, ut DH ad GH, ita GH ad BH. Unde GH quadratum æquale erit rectangulo DHB : ac proinde apposito communi quadrato BH, erunt quadrata duo BH, GH æqualia rectangulo DHB unà cum BH quadrato. Sed duobus quadratis BH, GH, propter angulum rectum BHG, æquale est BG quadratum. Itaque erit BG quadratum æquale rectangulo DHB unà cum BH quadrato. Unde impositis nominibus tum lineis datis DB, BG, cùm lineæ quæsitæ DH, facili negotio invenietur æquatio, quæ ipsius DH valorem exhibeat.

Ponatur enim DB $= a$, BG $= b$, & DH $= x$. Erit ergo BH $= x - a$, rectangulum DHB $= x^2 - ax$, quadratum ex BH $= x^2 - 2ax + a^2$, & quadratum ex BG $= b^2$. Ostensum est autem, rectangulum DHB unà cum BH quadrato æquale esse quadrato, quod fit ex BG. Itaque institutâ æqualitate inter valores algebricos harum quantitatum, fiet æquatio $2xx - 3ax + a^2 = b^2$, quæ legitimè reducta, ac resoluta dabit valorem quæsitæ lineæ DH.

Quæ-

Quæri etiã poteſt pro reſolutione problematis valor rectæ BH: quo caſu tametſi æquatio ad duas dimenſiones aſſurgat, pauciores tamen terminos involvet. Poſitis namque adhuc $AB = a$, & $BG = b$, ponatur $BH = x$. Erit ergo tota $DH = x + a$, rectangulum $DHB = x^2 + ax$, quadratum ex $BH = x^2$, & quadratum ex $BG = b^2$. Quocirca, quia rectangulum BHD unà cum BH quadrato æquale eſt ei, quod ſuper BG deſcribitur, quadrato; inſtitutâ rurſus æqualitate inter valores algebricos harum quantitatum, fiet æquatio $ax + 2x^2 = b^2$.

Sed videamus, num æquatio duarum dimenſionum pro reſolutione propoſiti problematis inveniri poſſit, quærendo valores aliarum linearum, quibus idem problema determinetur. Hunc in finem ſuper DE erigatur perpendicularis EK, quæ conveniat cum recta DC ipſi BE parallela in puncto K. Quia ergo angulus DEK rectus eſt, ſemicirculus deſcriptus ſuper recta DK tranſibit per punctum E. Unde, quia idem punctum E reperitur quoque in recta AB, quæri poteſt in reſolutione problematis valor rectæ DK, quippe quæ determinat problema, ſi deſcripto ſuper ea ſemicirculo, protrahatur

la-

latus AB, donec semicirculi hujus circumferentiam alicubi secet.

Ad inveniendum verò valorem rectæ DK, demittatur perpendicularis EL, quæ quum sit æqualis ipsi BC, sive DC, erit etiam EK æqualis DF: (sunt etenim æquiangula triangula ELK, DCF.) Et quoniam triangula DCF, DEK sunt etiam æquiangula, erit ut DK ad DE, ita DF ad DC: proindeq; rectangulũ CDK æquale erit rectangulo EDF; & consequenter si fiat CM æqualis DC, erit rectangulum MDK æquale duplo ejus, quod fit ex ED in DF; adeoque apposito communi quadrato ex EF, erit rectangulum MDK unà cum EF quadrato æquale duplo ejus, quod fit ex ED in DF, unà quoque cum EF quadrato.

Et quoniam duplum ejus, quod fit ex ED in DF, unà cum EF quadrato, est æquale duobus quadratis DE, DF, sive etiam DE, EK; erunt quadrata duo DE, EK æqualia rectangulo MDK unà cum EF quadrato. Sed duobus quadratis DE, EK, propter angulum rectum DEK, æquale est DK quadratum. Itaque, quia DK quadratum est æquale rectangulo MDK unà cum rectangulo MKD, erit rectangulum MDK unà cum EF quadrato æquale re-

Atque ex hac æquatione deducitur veritas lemmatis, pro resolutione propositi problematis à Pappo præmissi: nimirum, quod GK quadratum æquale sit quadratis, quæ fiunt ex CD, & EF: id, quod etiam syntheticè ostendi potest in hunc modum. Quoniam rectangulum DKM ostensum est æquale quadrato, quod fit ex EF; apposito communi CD quadrato, erit rectangulum DKM unà cum CD quadrato æquale duobus quadratis CD, EF. Jam verò, quum recta linea DM secta sit bifariam in puncto C, eique in directum sit adjecta alia MK; rectangulum DKM unà cum CD quadrato æquale est quadrato, quod fit ex CK. Itaque erit CK quadratum æquale quadratis, quæ fiunt ex CD, & EF.

III.

Problemata Physico-mathematica.

I. LEges motuum in occursu corporum inertium definire.

In definiendis legibus motuum, quæ in solidorum corporum congressu locum habent, duo corporum congredientium genera distinguunt Philosophi mechanici;

ci ; eorum unum , quæ vim habent elasticam , per quam compressa ad pristinum suum statum illicò se restituunt , & hujusmodi corpora vocant elastica , sive actuosa ;illorum alterum, quæ tali vi sunt destituta , eaq; corporū inertium nomine designant. Et quoniam nō parum conducit calculus speciosus in determinandis legibus motuum, quæ in utriusq; generis corporum congressu debent observari; idcirco primò leges motuum in occursu corporum inertium definiemus; tum eas, quæ locum habent in congressu corporum elasticorum , determinabimus.

Hunc in finem ex saniori Physica mutuanda sunt priùs principia , ex quibus leges istæ depēdent: nimirum primò,quod quantitas motus cujusq; mobilis definiatur per productum,quod oritur,multiplicādo velocitatē per pondus, sive quantitatem materiæ ; secundò quod velocitas sit affectio motus , per quam mobile datum spatium in dato tempore percurrit , adeò ut mensura ejus sit relatio , quam habet spatium ad tempus; & tertiò, quod actio, & reactio sint semper æquales , & contrariæ, hoc est, quod in omni corporeâ actione quantum unum corpus agit in aliud , tantundem resistentiæ ab isto patiatur.

His

His positis principiis, quæ ulteriori explicatione non egent, colligitur primò, quantitatem motus, quæ producitur, capiendo summam motuum, factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutari ab actione corporum inter se. Nam quum actio, & reactio sint semper æquales, & contrariæ; æquales item mutationes efficient in motibus versus contrarias partes. Itaque, si motus fiant ad eandem partem, quicquid additur motui corporis fugientis, subducetur ex motu corporis insequentis sic, ut summa maneat eadem, quæ priùs. Sin corpora obviam eant, æqualis erit subductio de motu utriusque; adeoque differentia motuum, factorum ad contrarias partes manebit eadem.

Colligitur secundò, eandem motus quantitatem, quæ producitur, capiendo summam motuum, factorũ ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, æqualem esse ei, quæ oriretur, si utrumque corpus velocitate communis centri gravitatis moveretur. Sint etenim in A, & B corpora duo, quorum pondera, sive quantitates materiæ vocentur m, & n, sitque C ipsorum commune centrum gravitatis. Moveantur primùm ad ean- FIG. 14.

dem partem, & pergant eodem tempore ad puncta D, & E, in qua positione sit F commune centrum gravitatis eorundem.

Itaque, si ponatur $AB = a$, $AD = b$, & $BE = c$, quia fiet tota $DE = a + c - b$, & commune centrum gravitatis duorum corporum dividit eorum distantiam in reciprocâ suorum ponderum ratione, invenietur recta $BC = \frac{am}{m + n}$, & recta $EF = \frac{am + cm - bm}{m + n}$: Unde, quum fiat recta tota $CE = \frac{am + cm + cn}{m + n}$, erit $CF = \frac{cn + bm}{m + n}$. Jam vero longitudines AD, CF, BE, velut descriptæ eodem tempore à punctis A, C, B, designant velocitates eorum punctorum. Itaque, si inventus valor ipsius CF multiplicetur per $m + n$, designabit productum $cn + bm$ quantitatem motus, quæ oriretur, si utrumque corpus velocitate communis centri gravitatis moveretur: & propterea, quia idem productum est summa ex propriis motibus eorundem corporum; liquet utique propositum.

Quod si verò corpora sibi mutuò obviam

viam eant, tunc iisdem positis invenietur quidem $BC = \frac{am}{m+n}$, sed erit $EF = \frac{am - cm - bm}{m+n}$. Unde, quia in hoc casu habetur $CE = \frac{am - cm - cn}{m+n}$, erit $CF = \frac{bm - cn}{m+n}$: & propterea multiplicato valore isto per $m+n$, productum erit $bm - cn$: ex quo patet, non quidem summam, sed differentiam motuum, factorum ad partes contrarias, æqualem esse motui, qui oriretur, si utrumque corpus velocitate communis centri gravitatis moveretur. FIG. 15.

Atque hinc colligitur tertiò, velocitatem communis centri gravitatis duorum corporum non mutari ab actione corporum inter se. Nam quantitas motus, quæ producitur, capiendo summam motuum, factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, per mutuam corporum actionem non mutatur. Sed huic motus quantitati æqualis est illa, quæ oriretur, si utrumque corpus velocitate communis centri gravitatis moveretur. Itaque hæc alia motus quantitas eadem quoque semper perseverat: quod

profectò fieri non potest, nisi velocitas communis centri gravitatis post actionem corporum maneat eadem, ac invariata.

Ex quibus modò facile erit, definire leges motuum in congressu corporum inertium. Nam corpora inertia, utpote vi elasticâ destituta, post occursum unà cum communi gravitatis centro junctim movebuntur. Quocirca corpora illa post occursum non aliam habebunt velocitatem, quàm eandem illam, qua fertur eorum commune centrum gravitatis. Sed ex ostensis velocitas communis centri gravitatis duorum corporum non mutatur ab actione corporum inter se. Itaque corpora inertia post occursũ movebuntur eadem velocitate, qua ferebatur ante occursum ipsorum commune centrum gravitatis.

Hinc retentâ eâdem denominatione, paulò ante usurpatâ, nimirum quod m, & n sint pondera, sive quantitates materiæ corporum congredientium, quodque b, & c sint velocitates eorundem corporum; velocitas communis centri gravitatis erit $\frac{bm + cn}{m + n}$, quum corpora moventur ad eandem

dem partem; & $\frac{bm - cn}{m + n}$, quum corpora sibi mutuò obviam eunt; & bm major est, quàm cn. Unde motus corporum post occursum erunt $\frac{bm^2 + cnm}{m + n}$, & $\frac{bmn + cn^2}{m + n}$ in primo casu; & vero erunt $\frac{bm^2 - cnm}{m + n}$, & $\frac{bmn - cn^2}{m + n}$ in casu secundo. Sed si velocitas, designata à litterâ c, sit æqualis zero, sive nihilo; ita ut quiescat corpus, ad quod illa refertur; tunc in omni casu erunt $\frac{bm^2}{m + n}$, & $\frac{bmn}{m + n}$ motus corporum post occursum.

Itaque si pondus primi corporis fuerit duarum librarum, & pondus secundi fuerit unius tantùm libræ, sitque præterea velocitas primi graduum septem, & velocitas secundi gradus unius, erit $m = 2$, $n = 1$, $b = 7$, & $c = 1$. Unde si corpora moveantur ad eandem partem, post occursum primum quidem habebit decem gradus motus, secundum verò gradus

quinque: Quod si fuerit quidem $m = 2$, & $n = 1$, sed sit $b = 6$, & $c = 0$, ita ut secundũ corpus quiescat, primum verò versus ipsum moveatur sex gradibus velocitatis; tunc post occursum primum habebit octo gradus motus, secundum gradus quatuor. Et denique si manentibus semper $m = 2$, & $n = 1$, ponatur $b = 7$, & $c = 2$, quodque corpora sibi mutuò obviam eant; tunc similiter post occursum primum quidem habebit octo gradus motus, secundum verò quatuor.

II. Leges motuum in congressu corporum elasticorum determinare.

Definitis legibus motuum pro corporibus inertibus, sibi mutuò occurrentibus, determinandæ sunt modò leges motuum, quæ locum habent in occursu eorum corporum, quæ dicuntur elastica, sive actuosa. Et quoniam hujusmodi corpora illa sunt, quæ vim habent elasticam, qua agente, compressa ad pristinum suum statum illicò se restituunt; id primò videndum, quid corporibus addat hæc vis elastica, & quem pariat effectum in ipso corporum congressu.

Nimirum quemadmodum corpora inertia post occursum debent eadem velocitate junctim moveri, unà cum communi

cen-

centro gravitatis, quia nulla datur causa, per quam à se mutuò debeant separari; ita præcipuus elasticitatis effectus est, ut corpora congredientia à se mutuò æqualiter, hoc est æqualibus viribus resiliant, & diversis velocitatibus aliquando ad eandem, aliquando ad partes contrarias moveantur.

Sit enim corpus aliquod elasticum quiescens, & immobile, cujus superficies vi alterius corporis occurrentis introrsum comprimatur. Et quoniam statim, ac cessat vis comprimens, sive motus corporis occurrentis, alterum vi sua insita elateris in pristinam figuram se restituet, & cum ea vi urgebit corpus primum, reflectetur hinc corpus occurrens eadem velocitate, quam priùs habebat. Sed si utrumque corpus sit elasticum, eo casu vis elastica in utroque corpore æqualiter aget, & æquales motus mutationes ad contrarias partes producet, propter eam naturæ legem, quod actio, & reactio sint semper æquales, & contrariæ.

Exinde autem, quod corpora elastica post occursum ratione elateris æqualibus viribus à se mutuò resiliãt, facile erit, leges congressuum pro corporibus elasticis unâ similiter regulâ definire. Si enim suppo-

namus, corpora esse perfectè elastica, hoc est, eadem vi in pristinam figuram se restituere, qua comprimuntur; jam utriusque velocitas post reflexionem eadem erit cum illa, qua accesserunt ad se mutuò. Unde, quum à se invicem debeant æqualibus viribus resilire, dividenda erit ipsis hæc velocitas in reciprocâ suorum ponderum ratione: proindeque definientur leges congressuum pro corporibus perfectè elasticis, si præter illam velocitatem, quâ junctim moverentur post occursum, si velut inertia considerentur, habeatur quoque ratio velocitatum, quibus ratione elasticitatis à se mutuò reflectuntur.

Nimirum primò, si corpora duo, quorum pondera sint m, & n, ita quidem moveantur ad eandē partem velocitatibus b, & c, ut primum sit corpus insequens, secūdum corpus fugiens; velocitas, quâ illa accedunt ad se mutuò, erit $b - c$, quæ siquidem iis dividatur in reciprocâ suorum ponderum ratione, erunt $\frac{bn - cn}{m + n}$; & $\frac{bm - cm}{m + n}$ velocitates, quibus à se mutuò resiliunt. Jam verò eadam corpora, si con-

considerentur velut inertia, debent junctim moveri versus plagam, ad quam fit motus, velocitate $\frac{bm+cn}{m+n}$. Itaque si ex hac velocitate subducatur velocitas, qua reflectitur corpus insequens, & eidem addatur velocitas, qua resilit corpus fugiens, erit $\frac{bm-bn+2cn}{m+n}$ velocitas corporis insequentis, & $\frac{2bm+cn-cm}{m+n}$ velocitas corporis fugientis. Unde post occursū motus illius erit $\frac{bm^2-bnm+2cnm}{m+n}$, motus verò istius erit $\frac{2bmn+cnm-cm^2}{m+n}$.

Secundò, si eadem corpora ita sibi mutuò obviam eant, ut primum majorem habeat motus quantitatem, quàm secundum; tunc velocitas, quà accedunt ad se mutuò, erit $b+c$, quæ siquidem iis dividatur in reciprocâ suorum ponderum ratione, erunt $\frac{bn+cn}{m+n}$, & $\frac{bm+cm}{m+n}$ velocitates,

tes,

tes, quibus à se mutuò resiliunt. Et quoniam eadem corpora, si considerentur velut inertia, debent junctim moveri versùs plagam, ad quam reflectitur secundum corpus, velocitate $\frac{bm - cn}{m + n}$: proinde si ex hac velocitate subducatur velocitas, qua reflectitur corpus primum, & eidem addatur velocitas, qua resilit corpus alterum; erit $\frac{bm - bn - 2cn}{m + n}$ velocitas corporis primi, & $\frac{2bm + cm - cn}{m + n}$ velocitas corporis secundi: Unde motus illius erit $\frac{bm^2 - bmn - 2cmn}{m + n}$, motus verò istius erit $\frac{2bmn + cmn - cn^2}{m + n}$.

Et denique si velocitas secundi corporis c ponatur æqualis zero, sive nihilo, ita ut quiescat secundum corpus, & dumtaxat primũ moveatur versùs ipsũ; eo casu erit b velocitas, qua accedũt ad se mutuò: proindeque divisâ ipsis hac velocitate

te in reciprocâ suorum ponderum ratione, erunt $\frac{bn}{m+n}$, & $\frac{bm}{m+n}$ velocitates, quibus à se mutuò resiliunt. Sed, si eadem corpora considerentur velut inertia, debent junctim moveri versùs plagam, ad quam reflectitur corpus quiescens, velocitate $\frac{bm}{m+n}$. Itaque si ex hac velocitate subducatur velocitas, qua reflectitur corpus mobile, & eidem addatur velocitas, qua resilit corpus quiescens; erit $\frac{bm-bn}{m+n}$ velocitas primi, & $\frac{2bm}{m+n}$ velocitas secundi: unde etiam motus istius erit $\frac{2bm^2}{m+n}$, motus verò illius erit $\frac{bmn-bn^2}{m+n}$.

Has leges generales exemplis illustrare, superfluum existimamus. Tantùm notabimus, in omnibus casibus secundum corpus post occursum moveri semper versùs eam plagam, ad quam fieret motus ejus, si utique velut iners consideretur; sed non item corpus primum, quippe quod

quod modò versùs illam, modò versùs partem contrariam moveri poteſt; quin etiam interdum manere poteſt quieſcens, ac immotum. Si enim velocitas, qua per vim elaſticam reflectitur, minor ſit velocitate, qua movetur ratione inertiæ, non mutabitur ejus directio, ſed perget adhuc moveri versùs eandem plagam; quod ſi verò fuerit major, mutabitur directio ejus, & tendet ab partem contrariam; ac deniq; ſi eidem fuerit æqualis, tunc ad neutram partem tendet, ſed manebit quieſcens, ac immotum. Patet autem, quod ſicuti hoc poſtremum contingit, quum motus ejus evaneſcit; ita contingat primum, quum motus ejus eſt poſitivus; & accidat ſecundum, ubi idem motus prodit negativus.

Notabimus quoque, quod quum pondera corporum congredientium fuerint æqualia, tunc leges ſuorum motuum ſint multò quidem ſimpliciores. Nam in primo caſu tendent ad eandem plagam, velocitatibus permutatis; in ſecundo caſu fiet quidem velocitatum permutatio, ſed movebuntur ad plagas contrarias; ac denique in tertio caſu velocitatem corporis moti excipiet corpus quieſcens, ipſumque corpus, quod antea movebatur, mane-

nebit immotum. Unde colligi potest, regulam à Cartesio traditam, quod si corpus unum impingat in alterum quiescens & æquale, ei omnem suam velocitatem communicet, ipsum verò in quiete permaneat, nonnisi in corporibus perfectè elasticis sibi locum vindicare.

III. Pilam positione datam subinde trudere, ut reflexa super lateribus ludi trudicularis, aliam similiter positione datam offendat.

Repræsentet rectangulū ABCD ludum trudicularem, in quo dentur positione pilæ duæ M, & N. Oportet, pilam M subinde trudere, ut reflexa super latere AB offendat pilam alteram N. FIG. 16.

Ponatur jam factum, sitque ME linea, per quam pila trudenda, & EN linea, per quam eadem reflexa impingit in pilam alteram N. Demittantur super latere AB perpendicula MO, NP. Et quoniam pilæ M, & N dantur positione, dabuntur ipsarum distantiæ à latere AB. Dabitur ergo tam perpendiculum MO, quàm perpendiculum NP; & consequenter, quum dentur puncta O, & P, dabitur etiam distantia eorum punctorum OP.

Ponatur itaque $MO = a$, $NP = b$, $OP = c$, & $OE = x$. Erit ergo $EP = c - x$.

— x. Et quoniam in corporum reflexione hanc legem natura observat, ut angulus reflexionis æqualis sit angulo incidentiæ; proinde angulus MEO æqualis erit angulo NEP. Unde, quum duo triangula MOE, MPE sint æquiangula, erit ut MO ad NP, ita OE ad PE, hoc est in terminis algebraicis, ut a ad b, ita x ad $c - x$: proindeque erit $bx = ac - ax$, sive etiam $ax + bx = ac$.

Et quoniam ex hac æquatione infertur hujusmodi analogia, quod $a + b$ sit ad a, ut c ad x; perspicuum est, punctum reflexionis E inveniri, si productâ OM versus Q, usque donec fuerit MQ æqualis NP, jungatur PQ, cui per punctum M ducatur recta parallela ME. Nam quum OQ sit ad MO, ut OP ad OE, propter triangula æquiangula POQ, EOM; erit ut $a + b$ ad a, ita c ad x; & consequenter punctum quæsitum illud erit, in quo ducta recta linea ME occurrit lateri AB.

FIG. 17. Oporteat nunc pilam M subinde trudere, ut post binas reflexiones, unam super latere AB, alteram super latere BC, impingat demum in pilam alteram N.

Id, quod quæritur, ponatur similiter jam factum; sitque ME linea, per quam pila trudenda; EF linea, per quam refle-

cti-

ctitur à latere AB, & incidit in latus BC; & FN linea, per quam reflexa à latere BC impingit in pilam alteram N.

Demittantur super lateribus AB, BC perpendiculares MO, NP; & ponatur $MO = a$, $NP = b$, $BO = c$, $BP = d$, & $OE = x$. Erit itaque $BE = c - x$. Et quoniam angulus incidentiæ MEO æqualis est angulo reflexionis FEB, triangula duo MOE, FBE æquiangula erunt: proindeque erit, ut MO ad FB, ita OE ad BE. Unde si fiat, ut x ad $c - x$, ita a ad quartam, invenietur $FB = \frac{ac - ax}{x}$, atque adeo $FP = \frac{dx - ac + ax}{x}$.

Similiter, quia angulus reflexionis NFP adæquat angulum incidentiæ EFB, triangula duo EBF, NPF æquiangula erunt: quare erit, ut BE ad NP, ita FB ad FP. Unde, quum in terminis algebraicis $c - x$ sit ad b, ut $\frac{ac - ax}{x}$ ad $\frac{dx - ac + ax}{x}$, sive etiam, ut $ac - ax$ ad $dx - ac + ax$; erit permutando, ut $c - x$ ad $ac - ax$, ita b ad $dx - ac + ax$. Jam verò $c - x$ est ad $ac - ax$, ut 1 ad a. Quare erit, ex æqua-

æquali, ut 1 ad a, ita b ad $dx - ac + ax$; & propterea erit $dx - ac + ax = ab$, hoc est $dx + ax = ab + ac$.

Quoniam autem ex hac æquatione infertur hujusmodi analogia, quod $a + d$ sit ad $c + b$, ut a ad x; liquet primum reflexionis punctum E inveniri, si productis lineis OM, OB versus Q, & R usque donec fuerit MQ æqualis BP, & BR æqualis NP, jungatur QR, cui per punctum M ducatur recta parallela ME. Nam, quum propter triangula æquiangula QOR, MOE, OQ sit ad OR, ut MO ad OE, erit ut $a + d$ ad $c + b$ ita a ad x: & propterea punctum quæsitum illud erit, in quo ducta recta linea ME occurrit lateri AB.

FIG. 18. Denique pilam M subinde oporteat trudere, ut post ternas reflexiones, unam super latere AB, alteram super latere BC, tertiam super latere CD, impingat tandem in pilam alteram N.

Ponatur quoque jam factum id, quod quæritur; sitque ME linea, per quam pila trudenda; EF linea, per quam reflectitur à latere AB, & incidit in latus BC; FG linea, per quam reflectitur à latere BC, & incidit in latus CD; ac denique GN linea, per quam reflexa à latere CD impingit in pilam alteram N.

De-

Demittantur super lateribus AB, CD perpendiculares MO, NP; & ponantur $MO = a$, $NP = b$, $BO = c$, $BC = d$, $CP = f$, & $OE = x$. Erit itaque $BE = c - x$. Et quoniam angulus reflexionis FEB adæquat angulum incidentiæ MEO, triangula duo FBE, MOE æquiangula erunt: quare erit, ut FB ad MO, ita BE ad OE. Unde si fiat, ut x ad $c - x$, ita a ad quartam, invenietur $FB = \frac{ac - ax}{x}$, atque adeo $FC = \frac{dx - ac + ax}{x}$.

Eadem ratione, quia angulus reflexionis GFC æqualis est angulo incidentiæ EFB, triangula duo EBF, GCF æquiangula erunt: proindeque erit, ut FB ad FC, ita BE ad CG. Unde si fiat, ut $\frac{ac - ax}{x}$ ad $\frac{dx - ac + ax}{x}$, sive etiam, ut $ac - ax$ ad $dx - ac + ax$, hoc est, ut $a \overline{c - x}$ ad $dx - ac + ax$, ita $c - x$ ad quartam; invenietur $CG = \frac{dx - ac + ax}{a}$; atque

adeo $GP = \frac{af - dx + ac - ax}{a}$.

Et quoniam angulus reflexionis NGP æqualis eſt angulo incidentiæ FGC, triangula duo FCG, NPG ſimiliter æquiangula erunt: proindeque erit, ut FC ad NP, ita CG ad GP. Unde, quum in terminis analyticis $\frac{dx - ac + ax}{x}$ ſit ad b, ſive etiam $dx - ac + ax$ ſit ad bx, ut $\frac{dx - ac + ax}{a}$ ad $\frac{af - dx + ac - ax}{a}$, hoc eſt, ut $dx - ac + ax$ ad $af - dx + ac - ax$; erit $bx = af - dx + ac - ax$, & conſequenter $bx + ax + dx = af + ac$.

Ex hac autem æquatione hujuſmodi infertur analogia, quod $a + b + d$ ſit ad $c + f$, ut a ad x. Unde primum reflexionis punctum E invenietur, ſi productis lineis OM, OB verſus Q, & R, uſque donec fuerit MQ æqualis ipſis BC, NP ſimul ſumptis, & BR æqualis ipſi CP, jungantur puncta Q, & R per rectam QR, cui agatur per punctum M recta parallela ME. Quum enim æquiangula ſint triangula QOR, MOE; erit, ut QO ad OR

OR ita MO ad OE, hoc eſt, ut $a + b + d$ ad $c + f$, ita a ad x: & proinde punctum quæſitum illud erit, quod ducta recta linea ME deſignat in latere AB.

IV. Globum datâ velocitate ita quidem projicere, ut in ſuo deſcenſu obliquo pergat ad datum locum.

Ad problematis hujus reſolutionem præmittenda ſunt priùs theoremata duo, quæ circa gravium deſcenſum demonſtravit primus omnium Galileus. Primum eſt, quod ſpatium à gravi, è quiete cadenti, dato tempore deſcriptum, dimidium ſit ejus, quod velocitate ultimò acquiſitâ, æquabiliter deſcriberetur. Alterum, quod ſpatia, deſcripta à gravi, è quiete cadenti, ſi capiantur ab initio deſcenſus, ſervent inter ſe eandem omnino rationem, ac quadrata temporum, quibus deſcribuntur.

Eſto itaque globus A, quem oporteat ſubinde projicere velocitate, quam acquirit in deſcenſu per altitudinem BA, ut cadendo pertingat ad datum locum N. FIG. 19.

Ponatur jam factum, ſitque AC linea projectionis, & AMN linea, quam deſcribit globus, dum projectus pertingit ad datum locum N. Ergo ſi fiat AD æqualis BA, deſcendet globus vi gravitatis per AD

eodem omnino tempore, quo descenderet per altitudinem BA. Sed completo parallelogrammo ADMC, debet globus tempore illo describere motu projectili rectam AC, ut per notissimam motuum compositionem reperiri possit in puncto M. Itaque per primum theorema BA, sive AD erit semissis ipsius AC.

Compleatur parallelogrammum aliud AONF, & jam eodem tempore, quo globus describit vi gravitatis rectam AO, idē motu projectili describet rectam AF. Unde, quia spatia AC, AF veluti descripta motu projectili, hoc est eadem semper velocitate, sunt, ut tempora descriptionum; & spatia AD, AO, veluti percursa vi gravitatis, sunt, ut quadrata eorundem temporum; erit ex æquali, ut AD ad AO, ita AC quadratum ad AF quadratum. Unde impositis nominibus tum notis, cùm incognitis quantitatibus, facile erit æquationem invenire, ad quam problema reducitur.

Nimirum demissâ super AO perpendiculari NQ, ponantur AD, sive BA $= a$, AQ $= b$, QN $= c$, & AO $= x$. Erit ergo AC $= 2a$, & OQ $= x - b$ (sive etiam $b - x$.) Et quoniam triangulum OQN rectum habet angulum in

Q,

Q; erit ON, five AF quadratum æquale OQ, QN quadratis: Unde, quia OQ quadratum eſt $x^2 - 2bx + b^2$, & QN quadratum eſt c^2, erit AB quadratum $= x^2 - 2bx + b^2 + c^2$. Oſtenſum eſt autem, AD eſſe ad AO, ut AC quadratum ad AF quadratum. Quare erit in terminis algebraicis; ut a ad x, ita $4a^2$ ad $x^2 - 2bx + b^2 + c^2$; & propterea quæſita æquatio erit $x^2 - 2bx + b^2 + c^2 = 4ax$, quæ legitimè reducta, ac reſoluta, incognitæ x valorem exhibebit.

Sed notetur hoc loco velim, quod ſi fuerit $c^2 = 4ab$, hoc eſt QN quadratum æquale rectangulo quater contento ſub BA, & AQ; tunc æquatio futura erit $x^2 - 2bx + b^2 + 4ab = 4ax$, cujus utrique parti ſi addatur $4a^2$, & transferatur ad partem alteram terminus $4ax$, habebitur loco ejus hæc altera $x^2 - 2bx + b^2 - 4ax + 4ab + 4a^2 = 4a^2$, quæ per extractionem quadratæ radicis reducitur ad $x - b - 2a = 2a$, hoc eſt ad $x = b + 4a$. Unde patet, determinari lineam projectionis AC, ſi ſumatur QO æqualis quadruplo ipſius BA. Sed quoniam quadrata radix ex $4a^2$ poteſt eſſe tam $2a$, quàm $-2a$, deducetur etiam exinde $x - b - 2a = -2a$, hoc ex $x = b$. Ex quo liquet, glo-

globum A pertingere quoque ad datum locum N, si secundum lineam horizontalem AE projiciatur.

Quod si locus datus fuerit in ipsâ lineâ horizontali AE, puta in E, tunc recta AQ fiet æqualis zero, sive nihilo, coincidentibus nimirum rectis AE, QN. Quocirca deletis in inventâ æquatione $x^2 - 2bx + b^2 + c^2 = 4ax$ terminis omnibus, ubi b reperitur; erit $x^2 + c^2 = 4ax$ æquatio, quæ in hoc casu problemati satisfaciet. Quod quidem perspicuum est. Nam completo parallelogrammo AKEI, positisque BA, sive AD $= a$, AE $= c$, & AK, sive EI $= x$; erit quadratum ex AI $= x^2 + c^2$, & quadratum ex AC $= 4a^2$. Unde, quia AK est ad AD; ut AI quadratum ad AC quadratum, erit ut x ad a, ita $x^2 + c^2$ ad $4a^2$; & propterea erit $x^2 + c^2 = 4ax$.

Hinc verò liquet, quod si ex puncto I erigatur super AC perpendicularis IL, quæ conveniat cum AB in puncto L; tota AL sit quadrupla ipsius AB. Est enim $x^2 + c^2 = 4ax$. Itaque AI quadratum æquale erit rectangulo, quod fit ex EI in quadruplum rectæ AB. Sed propter triangulum rectangulum AIL, idem AI quadratum est æquale rectangulo, quod fit ex

EI

EI in AL. Quare erit AL quadrupla ipsius AB. Unde patet, quod, quum datum punctũ est in linea horizontali AE, problema propositum ad hoc aliud purè geometricum revocari possit: nimirum in trianlo rectangulo AIL datâ hypothenusâ AL, & dato perpendiculo SI, invenire angulum LAI, qui determinat positionem lineæ AC.

Atque hoc artificio jam id omne determinari potest, quod ad motum spectat projectorum. In omni siquidem projectione quatuor considerari debent, nimirum velocitas, amplitudo, altitudo, & angulus projectionis. Ita si semita projecti sit AMN, designabit recta BA altitudinẽ, per quam grave corpus descendere debet, ut velocitatem acquirat, quæ in projectione requiritur; recta AE amplitudinem projectionis; recta GH, quæ bisecat ipsam AE, amplitudinem ejusdem projectionis; & CAE angulum, quem constituit cum Horizonte linea, per quam grave corpus projici debet. Unde patet, circa motum projectorum sex principaliora problemata institui posse.

Primum est, quum datis velocitate, & amplitudine projectionis, quæritur altitudo unà cum angulo. Secundum, quum

datis velocitate, & altitudine projectionis, quæruntur angulus, & amplitudo. Tertium quum datis velocitate, & angulo projectionis, quæruntur altitudo, & amplitudo. Quartum, quum datis amplitudine, & altitudine, quæritur velocitas unà cum angulo. Quintum, quum datis amplitudine, & angulo, quæruntur velocitas, ac altitudo. Et sextum denique, quum datis angulo, & altitudine, velocitatem, & amplitudinem oportet invenire.

Jam quemadmodũ in triangulo rectangulo AIL hypothenusa AL est quadrupla rectæ lineæ AB, quæ determinat velocitatem projectionis; ita portio AS est quadrupla rectæ GH, quæ ejusdem projectionis altitudinem definit. Nam sicuti AE est dupla ipsius AG, ita erit EI dupla ipsius GR. Sed quum AI quadratum sit ad AR quadratum, ut EI ad HR, erit eadem EI quadrupla ipsius HR. Itaque bisecta erit GR in H: & propterea sicuti EI, sive AS est quadrupla portionis HR, ita quoque erit quadrupla alterius portionis GH.

Hinc quia in eodem triangulo rectangulo AIL designat perpendiculum IS amplitudinem, & ALI angulum projectionis,

nis; liquet sex illa problemata ad alia totidem purè geometrica posse revocari. Primum etenim erit, quum datis hypothenusâ AL,& perpendiculo IS, quæritur segmentum AS unà cum angulo ALI. Secundum,quum datis hypothenusâ AL, & segmento AS, quæritur perpendiculum IS unà cum angulo ALI.Tertium, quum datis hypothenusâ AL, & angulo ALI, quæritur perpendiculum IS unà cum segmento AS. Quartum, quum datis perpendiculo IS, & segmento AS, quæritur hypothenusa AL unà cum angulo ALI. Quintum, quum datis perpendiculo IS, & angulo ALI, quæritur hypothenusa AL cum segmento AS.Et sextum denique, quum datis segmento AS, & angulo ALI, quæritur hypothenusa AL cum perpendiculo IS.

Hæc problemata facili negotio resolvet quicumque vel leviter in trigonometricis est versatus. Cæterùm,quum amplitudo projectionis designetur per perpendiculum IS, patet veritas ejus, quod primus omnium prodidit Galileus,nimirum amplitudinem projectionis maximam esse, quum angulus est graduum quadraginta quinque. Sed non obscurè exinde colligi quoque potest, eandem futuram esse

esse projectionis amplitudinem, sive angulus fuerit acutus, sive obtusus, qui duos rectos cùm acuto illo constituat.

V. Definire figuram vasis, ita ut fluidum erumpens per foramen, factum in fundo ejus, æqualibus temporibus æqualiter quoque deprimatur.

Hoc problema proposuit primus omnium Evangalista Torricellius; sed qui primus litterato Orbi solutionem ejus exhibuit, fuit Dominus Mariotte in suo de aquarum motibus tractatu. Pro ejus solutione præmittenda sunt priùs theoremata principaliora, circa motus fluidorum, per minora foramina erumpentium, ab Hydrostaticis demonstrata, cujusmodi sunt duo. Primum, quod quantitates fluidorum, per duo quælibet foramina eodem tempore æquabiliter erumpentium, sint ut velocitates, & foramina conjunctim. Alterum, quod velocitates, quibus fluida per foramina quævis erumpunt, sint in subduplicata ratione altitudinum fluidorum super iis foraminibus.

FIG. 20. Hisce suppositis, esto ADB curva, per cujus revolutionẽ circa axim AH, oritur vas quæsitum BAC. Sumantur in axe AH portiones duæ HI, IL æquales, & indefinitè parvæ. Itaque, si ducantur rectæ BC,

DE,

DE, FG perpendiculares axi AH, quantitates fluidorum, inclusæ circulis, qui à rectis illis, velut diametris, in vasis genesi describuntur, erumpent per foramen A eodem tempore: proindeque, per theorema primum, quantitates illæ fluidorum erunt inter se, ut velocitates, quibus erumpunt. Jam verò, per theorema secundum, velocitates istæ sunt in subduplicata ratione altitudinum AH, AI. Quare, ex æquali, eædem illæ fluidorum quantitates erunt inter se, ut radices quadratæ altitudinum AH, AI.

Et quoniam quantitates illæ fluidorum sunt duo cylindri, æquales altitudines habentes; & ex Geometriæ Elementis notum est, cylindros, quorum æquales sunt altitudines, esse inter se, ut bases; hoc est, ut quadrata diametrorum, quæ ad bases illas referuntur: erunt duæ illæ fluidorum quantitates, ut quadrata rectarum BC, DE; sive etiam, ut quadrata rectarum BH, DI: proindeque, rursus ex æquali, quadrata rectarum BH, DI erunt inter se, ut radices quadratæ altitudinum AH, AI; & consequenter, elevando ad quadratum omnes terminos hujus analogiæ, erit, ut quadrato-quadratum rectæ BH ad quadrato-quadratum rectæ DI, ita al-

altitudo AH ad altitudinem AI.

Unde patet, curvam BDA, ex cujus revolutione circa rectam AH oritur vas quæsitum, talem esse debere, ut quadrato-quadrata rectarum, quæ ex singulis curvæ punctis perpendiculariter demittuntur ad AH, sint inter se, ut portiones, quas rectæ illæ abscindunt ex ipsa AH: proindeque eò res redit, ut qua ratione curva ista describi possit, ostendamus. Sed quoniam circa rectam AH infinitæ hujusmodi curvæ describi possunt; proinde, ut problema determinemus, aliam ei oportet conditionem adjungamus: nimirum, ut curva describenda transire debeat per datum punctum B.

Itaque si ADB sit curva quæsita, & completo rectangulo AB, sumatur in AK portio quævis AO, determinari debet punctū D, in quo curvam secat recta linea OP, perpēdiculariter erecta super AK. Hūc in finem ponatur BH, sive AK $= a$; AH, sive BK $= b$; AO, sive DI $= c$; & OD, sive AI $= x$. Quia igitur per curvæ naturam quadrato-quadratum rectæ BH est ad quadrato-quadratum rectæ DI, ut AH ad AI; erit in terminis algebraicis, ut a^4 ad c^4, ita b ad x: proindeque, quum productum ex mediis æquale sit producto ex extremis,

mis, erit $a^4x = c^4b$.

Hinc determinabitur punctum D, si inventâ rectâ lineâ, quæ sit quinta proportionalis in ordine duarum AK, AO, fiat ut ista habeat ad OD eandem rationem, quam habet AK ad AH. Nam, quum hujusmodi recta linea per ea, quæ superiùs posita sunt, sit $\frac{c^4}{a^3}$; erit, ut $\frac{c^4}{a^3}$ ad x, sive etiam, ut c^4 ad a^3x, ita a ad b; & propterea erit $a^4x = c^4b$, prorsus ut supra.

C A P. III.

De natura, & proprietatibus æquationum.

POstquam problema ad æquationem reductũ est, & æquatio illa per legitimam reductionem ad suam simpliciorem expressionem est revocata, forma oportet æquationis ejus consideretur. Si enim contingat, ut in æquatione illa incognita magnitudo ad unicam tantùm dimensionem ascendat; quia valor illius jam innotescit, problema quoq; jam erit resolutum: nec proinde ulteriùs progrediendum, nisi ejusdem problematis, quum fue-

fuerit geometricum, constructio desideretur. Ita si æquatio, ex aliquo problemate orta, quum fuerit ad simpliciores terminos revocata, hanc formam induerit $x = 3a - 2b$; problema jam est resolutum, quandoquidem valor incognitæ x non ampliùs ignoratur.

Quod si autem æquatio talis fuerit formæ, ut in ea incognita magnitudo non unam, sed plures babeat dimensiones; tunc rursus æquatio poterit esse vel pura, vel affecta. Vocatur pura, quum in ea unica tantùm incognitæ potestas occurrit, sive sit quadratum, sive cubus, sive quævis alia potestas superior, ut $x^2 = ab$, $x^3 = abc$, $x^4 = a^3b$, &c. Vocatur autem affecta, quum in illa duæ, aut plures incognitæ magnitudinis potestates occurrunt, ut $x^2 + ax = b^2$, $x^3 + ax^2 = abc$, $x^3 + ax^2 - c^2x = a^2b$, &c.

Quum æquatio, ad quam problema reducitur, est pura, problema rursus jam erit resolutum; quia extrahendo ex utraque parte æquationis radicem illius potestatis, ad quam ascendit incognita magnitudo, valor ejus jam obtinetur. Ita si fuerit $x^2 = ab$, extrahendo hinc inde radicem quadratam, fiet $x = \sqrt{ab}$. Et similiter si æquatio, nata ex aliquo proble-

ma-

mate, fit $x^3 = abc$, extractâ ex utraque parte æquationis radice cubicâ, habebitur $x = \sqrt{3}\, abc$. Atque ita quoque, si problema aliquod ad hanc æquationem reducatur $x^4 = a^3b$, extrahendo utrinque radicem quadrato-quadratam, erit $x = \sqrt{4}\, a^3b$.

Sed si æquatio, ad quam problema reductum est, fuerit affecta, tunc non ita facile erit, ex æquatione illâ valorem incognitæ magnitudinis inferre. Unde, ne hæreat Analysta, quum in resolutione problematum in hujusmodi æquationes inciderit; necesse est regulas tradere, quarum ope possit ex æquationibus affectis valores incognitarum eruere. Qua in re operæ pretium priùs est, æquationum omnium naturam generatim ostendere, earundemque proprietates principaliores perspicuè aperire.

I.

De gradibus, terminis, & formulis æquationum.

Æquationes dividuntur in gradus ratione maximæ potestatis, ad quam ascendit in iis quantitas incognita. Dicuntur etenim æquationes simplices, sive

five primi gradus, in quibus incognita eſt linearis, hoc eſt ad primam poteſtatem aſcendit. Dicuntur æquationes quadratæ, five ſecundi gradus, quum in iis altior gradus, ad quem attollitur incognita, eſt quadratum, ſive ſecunda poteſtas. Dicuntur æquationes cubicæ, ſive tertii gradus, quum idem gradus eſt cubus, five poteſtas tertia; atque ita deinceps.

Hac ratione æquatio iſta $x = b + c$ vocatur ſimplex, five primi gradus, quia in ea incognita x ad primam poteſtatem aſcendit. Sed hæc æquatio $x^2 + ax = b^2$ vocatur quadrata, five ſecundi gradus, quia altior gradus, ad quem in ea attollitur incognita x, eſt quadratum, ſive ſecunda poteſtas. Atque ita quoque hæc altera æquatio $x^3 + ax^2 - abx = abc$ dicitur cubica, ſive tertii gradus, quia altior gradus, ad quem in ipſa reperitur elevata incognita x, eſt cubus, five poteſtas tertia.

Interim notetur hoc loco velim, quod æquatio aliqua tunc demum dicatur eſſe illius gradus, quem oſtendit maximæ incognitæ poteſtas, quum ad gradum inferiorem deprimi non poteſt. Si enim contingat, quod ea per regulas inferiùs tradendas deprimi poſſit, tunc dicenda eſt illius

lius gradus, ad quem utique deprimitur. Qua ratione æquatio $x^3 + ax^2 - abx = a^2b$ dicenda est est secundi gradus, quia scilicet per ea, quæ inferiùs dicenda sunt, deprimi potest ad hanc aliam $x^2 = ab$.

Quemadmodum autem æquationes dividuntur in gradus, ratione maximæ potestatis, ad quam incognita quantitas in iis attollitur; ita problemata dividuntur in certa genera, ratione æquationum, ad quas reducuntur. Hoc pacto vocatur problema primi generis, quod reducitur ad æquationem primi gradus; vocatur problema secundi generis, quod reducitur ad æquationem secundi gradus;atq; ita deinceps. Unde, ficuti æquatio ista $x^2 + ax = ab$ vocatur secundi gradus; ita problema, ex quo profecta est æquatio illa, secundi generis dicetur.

Atque hìc quoque notare oportet,quod ficuti æquationes dicuntur esse illius gradus,quē ostendit maxima incognitæ potestas, quum ad gradū inferiorē deprimi nō possunt;ita problemata dici debeant illius generis, quod indicat gradus æquationū, quæ in eorum problematū resolutione inveniuntur, quum propria sedes illarum æquationum in gradu illo subsistit. Unde ficuti æquatio, quum deprimi potest, di-

citur esse illius gradus, ad quem utique deprimitur; ita problema, unde profluxit æquatio illa, ejus generis esse dicetur, quod eadem æquatio depressa demonstrat.

Quoniam autem æquationes nihil aliud sunt, quàm congeries quantitatum sibi mutuò æqualium, duæ in iis partes sunt distinguendæ; quarum una post legitimam reductionem terminos omnes continebit, in quibus reperitur quantitas incognita; altera omnes alios, qui ex solis cognitis coalescunt. Sic in ista æquatione $x^2 - ax = a^2 - b^2$ partem unam constituunt termini $x^2 - ax$, partem alteram termini $a^2 - b^2$. Et similiter in hac æquatione $x^3 - a^2x = abc$ pars una erit $x^3 - a^2x$, pars altera erit abc.

Sed præstat quandoque, omnes æquationis terminos ad unam partem transferre, ipsamque æquationem considerare, velut congeriem quantitatum, quæ simul zero, sive nihilo sint æquales: adeo, ut in una æquationis parte omnes ejus termini reperiantur, in parte verò altera existat dumtaxat zero, sive nihilum. Ita si fuerit $x^2 - ax = ab$, erit $x^2 - ax - ab = 0$. Et similiter si habeatur $x^3 - a^2x = abc$, erit $x^3 - a^2x - abc = 0$.

Hanc porro terminorum omnium ad unam

unam partem æquationis transpositionem præstat subinde quidem efficere, ut terminus ille, in quo existit maxima incognitæ potestas, reperiatur affectus signo $+$. Ita si fuerit æquatio $ax - x^2 = ab$, & fieri debeat in ea terminorum omnium ad unam partem transpositio; quia terminus, maximam incognitæ potestatem comprehendens, afficitur signo $-$, fiet transpositio ista in hunc modum $ab - ax + x^2 = 0$.

Ad meliorem æquationis formam præstat quoque, omnes ejus terminos ordinare, secundùm dimensiones, quas in terminis illis habet incognita: ita nempe, ut primò loco ponatur terminus, comprehendens maximam incognitæ potestatem; tum gradatim omnes alii termini, in quibus incognita pauciores habet dimensiones; ac denique termini illi, qui ex solis quantitatibus cognitis coalescunt.

Hac ratione si fuerit æquatio $ax - x^2 = bx + a^2 - ab$, ea per transpositionem terminorum omnium ad unam partem, fiet primò $bx + a^2 - ab - ax + x^2 = 0$, tum porro ordinata evadet $x^2 + bx - ax + a^2 - b^2 = 0$. Et similiter si æquatio, ex resolutione alicujus problematis orta, fuerit $abx^2 + ax^3 - a^2 x^2 + x^4 = cx^3 -$

 $abcx$,

$abcx - a^2bx + a^2c^2 - a^2b^2$, ordinabitur illa in hunc modum $x^4 + ax^3 - cx^3 + abx^2 - a^2x^2 + abcx + a^2bx - a^2c^2 + a^2b^2 = 0$.

Quin etiam in ordinandis æquationibus præstat, unum infra alium, ponere omnes illos terminos, in quibus incognita eundem dimensionum numerum habet; atque ita etiam scribere terminos illos omnes, qui ex solis cognitis coalescunt, & in quibus incognita nullas dimensiones habere reperitur. Qua ratione postrema æquatio $abx^2 + ax^3 - a^2x^2 + x^4 = cx^3 - abcx - a^2bx + a^2c^2 - a^2b^2$ ordinabitur etiam in hunc modum.

$$x^4 \begin{array}{l} + ax^3 + abx^2 + abcx - a^2c^2 \\ - cx^3 - a^2x^2 + a^2bx + a^2b^2 \end{array} = 0$$

Scribendi sunt autem in hunc modum termini omnes, in quibus incognita eundem dimensionum numerum habet, quia scilicet contrahi possunt, & tametsi plures, ad unum tantùm revocari. Si enim supponamus $a - c = p$, jam erit $ax^3 - cx^3 = px^3$. Atque ita quoque ponendo $ab - a^2 = q$, & $abc + a^2b = r$, erit $abx^2 - a^2x^2 = qx^2$, & $abcx + a^2bx = rx$. Unde demum si ponamus $a^2b^2 - a^2c^2 = f$, habebitur loco illius æquationis hæc alia longe simplicior $x^4 + px^3$

$+ qx^2$

$+ qx^2 + rx + s = 0$, ubi tamen nulla signorum habenda eſt ratio.

Hinc in poſterum omnes illos terminos æquationis,in quibus incognita eundem dimenſionum numerum habet, velut unum reputabimus ; & ea propter diſtinguemus terminos æquationis, attendendo ad dimenſiones, quas in iis habet incognita. Ex quo colligere licet, unamquamque æquationem tot terminos habere poſſe, quot indicat gradus æquationis, auctus unitate unâ, & non plures: nimirum duos, ſi æquatio fuerit primi gradus ; tres, ſi ſecundi; quatuor, ſi tertii; atq; ita deinceps.

Jam, diſtinguendo terminos æquationis in hunc modum, dicemus terminum primum, qui maximam incognitæ poteſtatem comprehendens, ipſius æquationis gradum oſtendit ; dicemus terminum ſecundum, in quo incognita dimenſiones habet unâ pauciores ; atque ita deinceps. Qua ratione vocabimus ultimum terminum æquationis, qui ex ſolis cognitis conſtans, nullam incognitæ dimenſionem comprehendit. Sic in æquatione iſta ſecundi gradus $x^2 - ax + bc = 0$ primus terminus eſt x^2, ſecundus $- ax$, & tertius, ſive poſtremus eſt $+ bc$.

Sed nihil obſtat, quominus aliquando

unus, vel plures ex terminis intermediis in æquatione deficiant. Ita, si oporteat inter a, & b invenire mediam proportionalem, quam voco x, habebitur æquatio secundi gradus $x^2 = ab$, sive $x^2 - ab = 0$, quæ secundo termino caret. Et similiter, si inter a, & b duas oporteat medias proportionales invenire, vocando x primam illarum, habebitur æquatio $x^3 = a^2b$, sive $x^3 - a^2b = 0$, quæ secundo, & tertio termino caret.

Terminos istos deficientes solent Algebristæ stellulis designare, ut scilicet eorum defectus statim intelligatur: unde æquationem $x^2 - ab = 0$ efferunt hac ratione $x^2 * - ab = 0$; & similiter æquationem $x^3 - a^2b = 0$ designant in hunc modum $x^3 * * - a^2b = 0$. Sed notetur hoc loco velim, quod sicuti primus terminus numquam ab æquatione abesse potest, quia is velut primus habetur, qui maximam continet incognitæ potestatem; ita neque etiam ultimus, hoc est, qui omnino notus est, deficere possit; quia si utique incognita in terminis omnibus reperiatur, potest ea per divisionem è singulis elidi, atque ita terminus haberi, qui ex solis cognitis coalescat.

Itaque in æquatione dumtaxat ex ter-

terminis intermediis unus, vel plures deficere possunt. Neque verò per defectum horum terminorum minuitur gradus æquationis, utpote qui ex dimensionibus, quas in primo termino habet incognita, debet æstimari. Interim ex defectu eorum terminorum negari non potest, quin æquatio sit longè simplicior. Nam valorem inogcnitæ x longè faciliùs percipi, quum habetur $x^2 * - ab = 0$, quam quum invenitur $x^2 - ax + ac = 0$, nemo non videt.

Sed quandoque defectu terminorum intermediorum licet etiam æquationem quodammodo ad gradum inferiorem deprimere. Ita, si fuerit æquatio quarti gradus $x^4 * + px^2 * - q = 0$, quæ secũdo, & quarto termino caret; poterit illa quodãmodo ad aliam secundi gradus deprimi. Nam ponendo $x^2 = y$, & scribendo in æquatione illa y pro x^2, & y^2 pro x^4, prodibit loco ejus hæc alia $y^2 + py - q = 0$, quam liquet esse secundi gradus.

Patet autem, hujusmodi artificio tunc demum æquationes deprimi posse, quum numeri dimensionum, quas in terminis æquationis habet incognita, per unum eundemque numerum dividi possunt. Quod equidem quum accidit, deprime-

tur æquatio, capiendo incognitam aliam, quæ adæquet eam potestatem incognitæ, in æquatione contentæ, quam maximus eorum numerorum divisor ostendit. Ita, si fuerit æquatio $x^{12} + px^8 - q = 0$, quia maximus divisor numerorum 12, & 8 est 4, fiat $x^4 = y$, & deprimetur æquatio ad hanc aliam $y^3 + py^2 - q = 0$.

Cæterùm considerando, velut unum, omnes illos terminos, in quibus incognita eundem dimensionum numerum habet, & distinguendo terminos æquationis, habitâ earundem dimensionum ratione; poterunt cujusque gradus æquationes ad formulas quasdam generales revocari: nimirum si scribatur p pro quantitate cognitâ secundi termini, q pro quantitate cognitâ termini tertii, atque ita deinceps. Qua ratione omnes secundi gradus æquationes, nullâ habitâ signorum, quibus termini afficiuntur, ratione, poterunt sub hac formulâ exhiberi $x^2 + px + q = 0$. Atque ita quoque æquationes omnes tertii gradus, non attendendo ad signa, quibus ipsarum termini affici possunt, sub hac generali formulâ poterunt comprehendi $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

De

II.

De homogeneitate, in terminis æquationum observandâ.

Cujuscumque sint gradus æquationes, quæ in resolutione problematũ inveniuntur, illud in iis sedulò observabit Analysta, ut termini omnes sint homogenei, hoc est, ut singuli eundem dimensionum numerum habeant, quem prior terminus continet. Hæc terminorum homogeneitas in æquationibus numericis, ubi nempe quantitates cognitæ numeris exprimuntur, semper quidem potest considerari. Nam quilibet numerus fingi potest, veluti ortus ex multiplicatione aliorum quotcumque numerorum: proindeque in omni numero tot semper dimensiones, quot libuerit, distinguere licebit.

Ita, si fuerit æquatio numerica $x^3 - 2x^2 + 6x - 24 = 0$, quemadmodum in ea prior terminus x^3 tres continet dimensiones, ita & in omnibus aliis terminis tres quoque dimensiones poterunt distingui. Nam considerando numerum 2, veluti unius dimensionis, erit trium di-

dimensionum secundus terminus $-2x^2$. Et similiter considerando numerum 6, veluti ortum ex multiplicatione numerorum 2, & 3; erit ille duarum dimensionum: proindeque tertius terminus $6x$ tres dimensiones habebit. Atque ita quoque si ultimum terminum 24 consideremus, veluti genitum ex multiplicatione numerorum 2, 3, & 4; in eo tres item dimensiones poterunt distingui.

Hæc eadem terminorum homogeneitas in æquationibus litteralibus, ubi nempe quantitates cognitæ alphabeti litteris exprimuntur, semper etiam observabitur, si nomina quantitatibus imponantur secundùm propriam ipsarum naturam, hoc est, si quantitates unius dimensionis designentur unicâ litterâ, quantitates duarum dimensionum designentur duabus litteris, per se mutuò multiplicatis; atque ita de aliis. Ita, si in triangulo isosceli quæratur perpendiculum demissum super basi ex datis areâ, & perimetro; invenietur hæc æquatio $x^3 - a^2x + 2abc = 0$, in qua omnes termini sunt homogenei: siquidem semissis datæ perimetri, veluti unius dimensionis, vocetur a; & area data, tanquam duarum dimensionum, vocetur bc.

Quod

Quod si autem nomina quantitatibus imponantur nequaquam secundùm propriam earum naturam, tunc equidem æquationes, quæ pro resolutione problematum inveniuntur, non omnes habebunt terminos homogeneos. Ita, si in triãgulo rectangulo ex datis areâ, & hypothenusâ quærantur crura; & vocetur a hypothenusa data, b duplum datæ areæ, & x unum ex cruribus, prodibit hæc æquatio $x^4 - a^2x^2 + b^2 = 0$, in qua non omnes termini sunt homogenei: quia nempe area data, veluti duarum dimensionum, & consequenter duplum ejus, non unicâ, sed duabus litteris per se mutuò multiplicatis debet designari.

Sed nihil obstat, quominus etiam hoc casu terminos æquationis, velut homogeneos consideremus: nimirum, si quemadmodum inter quantitates, numeris designatas, consideratur una, ad quam omnes aliæ referuntur, quæque unitas dicitur; ita eandem unitatatem consideremus quoque inter quantitates, quæ litteris exprimuntur: adeò, ut ad eam omnes aliæ quantitates perinde se habeant, ac numeri omnes ad unitatem. Sic enim in æquationibus termini illi, qui pauciores, aut plures habent dimensiones, quàm

quàm in primo termino continentur, ope unitatis fingi possunt tot dimensiones habere, quot ad servandam homogeneitatem requiruntur.

Ita, si fuerit æquatio $x^3 - bx + a^2b^2 = 0$; quia in ea primus terminus x^3 tres continet dimensiones, ad servandam homogoneitatem, necesse est, ut alii termini tres itidem dimensiones contineant. Unde, quia terminus $- bx$ videtur esse duarum dimensionum, cogitari potest, terminum illum multiplicatum esse per unitatem, atque ita non duas, sed tres dimensiones habere. Pariterque, quia terminus $+ a^2b^2$ videtur quatuor dimensiones comprehendere, fingi potest, terminum illum divisum esse per unitatem, atque ita non quatuor, sed tres dimensiones includere.

Non dissimiliter consideranda est etiam homogeneitas in terminis æquationum, quum sub quibusdam formulis generalibus exhibentur. Nam quotiescumque, exempli gratia, æquationes omnes tertii gradus, nullâ habitâ ratione signorum, quibus termini ipsarum affici possunt, comprehenduntur sub hac formulâ generali $x^3 + px^2 + qx + r = 0$; proculdubio lex homogeneitatis nequaquam videtur ob-

observata. Sed nihilominus, considerando tertium terminum qx, veluti multiplicatum per unitatem, & terminum ultimum r, veluti ductum in quadratum unitatis; habebunt termini illi, perinde ac duo priores, tres dimensiones; atque ita omnes termini erunt inter se mutuò homogenei.

Atque hac ratione, non modò illud fieri potest, ut partes omnes unius, ejusdemque quantitatis æquè multis dimensionibus constent, verùm etiam hoc ampliùs potest obtineri, ut quantititates omnes, veluti lineæ omnino simplices concipi queant, licèt plures dimensiones habere videantur. Quemadmodum enim, ut ex istâ quantitate $a^2b^2 - b$ extrahi possit radix cubica, cogitandum est, partem unam a^2b^2 divisam esse per unitatem, partem verò alteram b multiplicatam esse per quadratum unitatis; ita quoque si quantitas a^2 concipiatur divisa per unitatem, veluti simplex linea poterit haberi; & similiter quantitas a^3, si consideretur divisa per quadratum unitatis, nihil vetat, quominus pro simplici linea habeatur.

Et sanè invectâ in Geometriam unitate, licebit multiplicationem, divisio-

sionem, & radicum extractionem perinde lineis perficere, ac numeris fieri solet. Nimirum primò multiplicantur inter se mutuò numeri duo, quum tertius invenitur, qui sit ad unum ipsorum, ut est alter ad unitatem. Ergo ad eundem modem modum, si AB sit unitas, & oporteat multiplicare BD per BC, jungantur puncta A, & C per rectam AC, & ductâ DE ipsi AC parallela, erit BE productum hujus multiplicationis; quandoquidem propter triangula æquiangula BDE, BAC, BE est ad BD, ut BC ad BA.

FIG. 21.

Secundò dividitur numerus unus per alium numerum, quum tertius invenitur, qui sit ad dividendum, ut est unitas ad divisorem. Itaque assumptâ rursus AB pro unitate, si oporteat dividere BE per BD, jungantur puncta D, & E per rectam DE, & ductâ AC ipsi DE parallela, erit BC quotiens hujus divisionis. Nam, quum triangula BAC, BDE sint æquiangula; erit, ut BC ad BA, ita BE ad BD; atque adeò permutando erit, ut BC ad BE, ita BA ad BD.

Denique extrahitur ex aliquo numero radix quæcumque, quum inter ipsum, & unitatem tot mediæ proportionales inveniuntur, quot designat exponens radicis

cis extrahendæ, minutus unitate; hoc est una, si radix sit quadrata; duæ, si cubica; atque ita deinceps. Quare positâ semper AB, velut unitate, si oporteat radicem, exempli gratia, quadratam extrahere ex BC, ponantur in directum rectæ AB, BC, & descripto super AC semicirculo ADC, erit perpendicularis BD radix quæsita; quum, propter notissimam circuli proprietatem, AB sit ad BD, ut BD ad BC. FIG. 22.

Non me latet, id Tyronibus nonnihil negotii facessere, utpote qui edocti ab Euclide, duas lineas per se mutuò multiplicatas rectangulum producere, non ita facile intelligunt, qua ratione ex earundem linearum multiplicatione possit alia linea simplex oriri; quum exinde illud ipsis sequi videretur, ut linea, & rectangulum à se mutuò differre non debeant. Sed sciant velim, ex multiplicatione duarum linearum nec lineam aliam simplicem, nec rectangulum oriri; verum dumtaxat productum illud designari posse, tum per rectangulum sub lineis illis contentum, cùm per lineam aliam, quæ sit ad unam illarum, ut est altera ad unitatem.

Quod ut clariùs intelligant, animadvertendum est priùs, in universâ Matheſi

quan-

quantitates non quidem in se ipsis, sed prout inter se mutuò referuntur, considerari; quũ sicuti intima cujusq; rei substãtia penitus nos latet, ita quantitatis principium omnino nos fugiat. Hinc enim fit, ut quum quæritur productum, quod oritur ex multiplicatione duarum linearum, quarum unam voco *a*, alteram *b*, dumtaxat designari debeat relatio, quam productum illud habet ad aliud, genitum ex multiplicatione duarum quarumvis aliarum linearum, puta *c*, & *d*: nec de vera utriusque producti magnitudine sollicitos nos esse oportet; quum sicuti linearum, ita producti, ex earundem multiplicatione orti, vera magnitudo sciri non possit.

Itaque, quia productum ex primis *ab* est ad productum ex secundis *cd* in ratione compositã ex *a* ad *c*, & ex *b* ad *d*; perspicuum est, unumquodque illorum productorm designari posse, tum per rectangulum, contentum sub lineis, ex quarum multiplicatione oritur; cùm per lineam aliam, quæ sit ad unam illarum, ut est altera ad unitatem. Nam primò, si fuerint rectangula duo, unum contentum sub lineis *a*, & *b*, alterum contentum sub lineis *c*, & *d*; habebunt rectangula illa

illa rationem compositam ex *a* ad *c*, & ex *b* ad *d*. Et secundò si fiat, ut unitas ad *a*, ita *b* ad *m*; & rursus, ut unitas ad *c*, ita *d* ad *n*: ratio, quam habet *m* ad *n*, componetur quoque ex rationibus, quæ sunt inter *a*, & *c*; & inter *b*, & *d*.

Horum primum patet ex Elementis, quum ostensum sit ab Euclide, parallelogramma æquiangula rationem habere, ex lateribus compositam. Sed & alterum ostendi potest in hunc modum. Ratio, quam habet *m* ad *n*, componitur ex rationibus, quæ sunt inter *m*, & *b*; inter *b*, & *d*; & inter *d*, & *n*. Itaque, quia *m* est ad *b*, ut *a* ad unitatem; & *d* est ad *n*, ut unitas ad *c*: eadem ratio, quam habet *m* ad *n*, componetur ex rationibus, quæ sunt inter *a*, & unitatem; inter *b*, & *d*; & inter unitatem, & *c*. Jam verò rationes, quæ sunt inter *a*, & unitatem; & inter unitatem, & *c*, componunt rationem, quæ est inter *a*, & *c*. Itaque ratio, quam habet *m* ad *n*, componetur ex rationibus, quæ sunt inter *a*, & *c*; & inter *b*, & *d*.

Atque hac ratione, aliud agentes, verum, quem unitas præstat in Geometriâ, usum aperuimus, nimirum rationes, quæ ex duabus, aut pluribus componuntur, ad simplices revocare: id quod etiam ostendi

poteſt hac ratione, quia ſi unitas illa vocetur b, faciendo ut b ad a, ita b ad m, & ut b ad c, ita d ad n; erit tam $ab = bm$, quàm $cd = bn$: quare erit, ut ab ad cd, ita bm ad bn. Sed ab eſt ad cd in ratione compoſitâ ex a ad c, & ex b ad d; itemque bm eſt ad bn, ut m ad n. Quare ratio, quam habet m ad n, componetur ex rationibus, quæ ſunt inter a, & c; & inter b, & d.

Id autem conſideranti liquidò patebit, quod tametſi unitatis artificium in Geometriâ non adhibuerint Veteres, ipſum tamen uſum unitatis aliâ ratione, & quidem meo judicio præſtantiori, fuerint conſequuti. Si enim ratio compoſita ex rationibus, quæ ſunt inter a, & c; & inter b, & d, more Veterum ad ſimplicem eſſet revocanda; aſſumptâ magnitudine quavis m, id quidem fieri deberet, ut a ſit ad c, ut m ad k, & b ſit ad d, ut k ad n; quum ratio, quam habet m ad n, velut compoſita ex rationibus, quæ ſunt inter m, & k; & inter k, & n, componatur eo ipſo ex rationibus, quæ ſunt inter a, & c; & inter b, & d.

Sed notare licet hoc loco, quod ſicuti in rationibus compoſitis ad ſimplices revocandis primam magnitudinem ad libitum

tum Veteres assumebant, quam tamen deinde retinebant eandem, & invariatam; ita pro unitate, quæ illud idem præstat aliâ ratione, quælibet quantitas possit assumi, quam tamen assumptam mutare ampliùs non licet. Ubi etiam notandum, quod tametsi aliæ sint lineæ, quæ oriuntur ex multiplicationibus duarum linearum, quum assumitur quantitas una pro unitate, quàm quum assumitur quantitas altera; non hinc tamen dici possit, producta earum multiplicationum variari; quia rursus sciatur velim, lineas illas non veras productorũ magnitudines, sed tantũ rationes, quas habent inter se mutuò, designare.

Quod de unitate respectu multiplicationis dictum est, illud idem intelligi quoque debet respectu divisionis. Nam sicuti multiplicando a per b, & c per d, oriuntur producta duo, quæ rationem habent, compositam ex a ad c, & ex b ad d; ita dividendo a per b, & c per d, oriuntur duo quotientes, quorum ratio componitur ex rationibus, quæ sunt inter a, & c, & inter d, & b. Cæterùm, quia mirum alicui videri potest, quod superiùs dictum est, ex multiplicatione duarum linearum, nec lineam aliam simplicem, nec rectangulum oriri: proinde, ne in eo hæ-

 reat,

reat, animadvertat velim, quod si ex multiplicatione duarum linearum oriatur rectangulum, amplissimæ Geometriæ scientiæ jam fines essent angustissimi; quia etsi dici possit oriri solidum ex multiplicatione trium linearum, attamen, quum lineæ, quæ multiplicari debent inter se mutuò, sunt plures, quàm tres, dici nequit quid exinde oriatur; quandoquidem in rerum naturâ non est aliquid contentum pluribus, quàm tribus dimensionibus.

Id norunt etiam ex ipsis Veteribus Mathematicis nonnulli. Nam, ut ex Pappo discimus, quæstionem illam, quam nec Euclides, nec Apollonius, nec quisquam alius ex Veteribus resolvere penitus potuerat, quidam ad sex tantùm lineas extendebant, quia si plures essent, quàm sex, non audebant dicere, an data sit proportio cujuspiam contenti quatuor lineis ad id, quod reliquis continetur, quoniam non est aliquid contentum pluribus, quã tribus dimensionibus. Sed alii non veriti fuerunt, ad quemcumque numerum linearum quæstionem illam extendere, interpretando paulò aliter producta, quæ ex duarum, aut plurium linearum oriuntur multiplicatione; nimirum, velut quã-

rita-

titates, quarum ratio ex duabus, aut pluribus rationibus componatur.

III.

De radicibus æquationum, & de earum multiplici specie.

Radicem æquationis vocamus valorem, quem in eâ habet quantitas incognita. Ita, si fuerit æquatio $x = a$, sive $x - a = 0$, radix æquationis erit quantitas a, utpote valor incognitæ x. Et similiter, si habeatur æquatio $x^2 = ab$, sive $x^2 - ab = 0$, erit $\sqrt{ab}$ radix ipsius, quia scilicet, si ex utraque parte hujus æquationis $x^2 = ab$ extrahatur quadrata radix, prodibit $x = \sqrt{ab}$.

Jam considerando æquationes, velut aggregata quantitatum, quæ omnes simul nihilo sint æquales, perspicuum est, radicem æquationis talem esse debere, ut si in eâ loco incognitæ substituatur, efficiat quantitates omnes evanescere. Unde hac ratione facile erit experiri, num quãtitas aliqua sit radix æquationis, necne; quia id tantùm inquirendum, num substituendo illam loco incognitæ, æquationis termini omnes evanescant.

Quæ-

Quæratur, exempli gratia, num numerus 2 sit radix hujus æquationis numericæ $x^2 - 5x + 6 = 0$. Substituatur ipse numerus 2 loco incognitæ x, & ejus quadratum 4 loco x^2. Et quoniam hac factâ substitutione, æquationis termini omnes contrarietate signorum se mutuò destruunt, quum $4 - 10 + 6$ idem sit, ac nihil; concludendum est in æquatione propsitâ valorem incognitæ x esse numerum 2, atque adeo radicem ipsius æquanis esse eundem numerum 2.

Eadem ratione invenietur, quantitatem a esse valorem incognitæ x in hac æquatione $x^2 - ax - bx + ab = 0$, atque adeo radicem ipsius æquationis; quia scilicet, si in eâ ponatur a loco incognitæ x, & a^2 loco x^2, termini omnes contrarietate signorum, quibus afficiuntur, evanescent, nec aliquid supererit. Sed ejusdem æquationis quantitas $2a$ nequaquam est radix, quia factâ substitutione, relinquitur $2a^2 - ab$, nec termini ejus sese mutuò destruunt.

Omnis autem æquatio, quum plures habet dimẽsiones, plures itẽ radicẽ admittit. Sic in eâdem illâ æquatione numericâ $x^2 - 5x + 6 = 0$, si pro x scribatur numerus 3, & pro x^2 numerus 9, producetur 9

—15

$-15+6$, quod idem est, ac zero, sive nihil. Unde, quia non modò numerus 2, verùm etiam numerus 3 reddit terminos illius æquationis conjunctim æquales zero, sive nihilo; consequens est, ut radix ejus æquationis sit tam numerus 2, quàm numerus 3.

Similiter æquationis hujus litteralis $x^2 - ax - bx + ab = 0$ radix, non modò est quantitas a, verùm etiam quantitas b; quia sicuti substituendo a loco incognitæ x, & a^2 loco x^2, producitur $a^2 - a^2 - ba + ab$, hoc est zero, sive nihil; ita quoque, si substituatur b loco incognitæ x, & b^2 loco x^2, producetur $b^2 - ab - b^2 + ab$, cujus partes contrarietate signorum se mutuò destruunt.

Atque ita quoq; æquationis hujus numericæ $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ radix erit quilibet numerorum 2, 3, & 4; quia, sive pro x scribatur numerus 2, sive numerus 3, sive numerus 4, producetur semper zero, sive nihil, & unusquisque eorum numerorum implebit conditionem incognitæ x, efficiendo, ut termini omnes æquationis conjunctim æquentur zero, sive nihilo.

Interim, ne mirum alicui videatur,

eandem æquationem, quum ad plures dimensiones ascendit, posse plures item radices habere; sciendum est, unum idemque problema, tametsi determinatum, posse plures solutiones addmittere. Itaque, ut problemati, quum plurium solutionum est capax, possit per singulos casus satisfieri, invenietur in ejus resolutione æquatio talis, quæ tot radices admittet, quot modis problema solvi poterit.

Hoc pacto, si numerus quæratur, qui subductus à 5 det tale residuum, ut quod producitur ex multiplicatione ejus per eundem illum numerum, sit 6; vocando x numerum quæsitum, orietur æquatio $5x - x^2 = 6$, sive $x^2 - 5x + 6 = 0$, cujus duæ sunt radices, una nempe 2, altera 3. Quod quidem exinde dependet, quia problema duobus modis solvi potest, ejusque conditiones adimplet, tam numerus 2, quàm numerus 3.

FIG. 25. Similiter si dato circulo ACB, quæratur punctum, in quo ejus circumferentia secatur à rectâ DC, quæ ducitur æquidistanter diametro AB ad datum intervallum; quia duo sunt puncta intersectionis, duo item responsa admittit problema: proindeque æquatio, intersectionem determi-

minans, duas debet habere radices, quibus utraque interfectio determinetur: Et profectò si ponatur perpendicularis CE $= a$, diameter AB $= 2b$, & fegmentum AE $= x$, invenietur æquatio $2bx - x^2 = a^2$, five $x^2 - 2bx + a^2 = 0$, cujus pro duplici dimenfione duæ item funt radices.

Quippe fciendum, æquationem omnem tot radices, five diverfos valores habere poffe, quot funt dimenfiones ejus, & non plures. Sic æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$ duas habet radices 2, & 3; non autem plures: nam quilibet ex duobus illis numeris, fcriptus in æquatione loco incognitæ x, efficit, ut termini omnes contrarietate fignorum fe mutuò deftruant, & præter illos nullus alius numerus poteft inveniri, cujus fubftitutione hoc idem eveniat. Pariterque æquationis hujus $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ tres tantùm funt radices, & non plures; quum dumtaxat numeri 2, 3, & 4 poffint incognitæ x conditiones adimplere.

Radices autem æquationis duplices effe poffunt, aliæ nempe pofitivæ, & aliæ negativæ. Sic æquationis hujus $x^2 + 3x - 10 = 0$, pro duplici dimenfione, duæ quidem funt radices, fed illarum una eft po-

positiva, altera negativa. Nam ex numeris duobus, qui scripti loco incognitæ x efficiunt, æquationis terminos omnes evanescere, unus quidem est 2, alter -5: proindeque in illâ æquatione non modò 2, verùm etiam -5 esse potest valor incognitæ x.

Sic etiam in hac æquatione $x^3 - 19x + 30 = 0$, quæ pro triplici dimensione tres item radices admittit, duæ ex radicibus sunt positivæ, una verò negativa. Nam in eâ, sive scribatur 2, sive 3 loco incognitæ x, semper æquationis termini omnes contrarietate signorum evanescent. Verùm, quia hoc idem evenit quoque, si pro x ponatur -5; consequens est, ut pro valore incognitæ x assumi possit, non modò quilibet ex numeris positivis 2, & 3, verùm etiam numerus negativus -5.

Jam, quemadmodum numerus radicum, quas admittit æquatio, ostendit quot modis problema solvi potest; ita species, sive qualitas cujusque radicis indicat statum, in quo consideranda est quantitas, ut per eam problemati possit satisfieri. Ita si quæratur quantum habeat in bonis, qui lucratus aureos 100 reperitur habere 60, fiet æquatio $x + 100 = 60$,

$= 60$, hoc eſt $x + 40 = 0$. Unde quum valor incognitæ x ſit negativus, dicendum eſt, eum non modò nihil in bonis habere, ſed ei deficere quadraginta, ut lucratus aureos 100 dici poſſit habere 60.

Similiter ſi dati ſpatii pedum duodecim quæratur quantum aliquis debeat percurriſse, ut poſſit reliquū ejuſdē ſpatii quatuor gradibus velocitatis eodem omninò tempore percurrere, quo alter percurreret totum ſpatium tribus gradibus velocitatis; invenietur æquatio $x + 16 = 12$, hoc eſt $x + 4 = 0$. Quocirca, quia valor incognitæ x eſt negativus, concludendum eſt, eum dati ſpatii non modò debere nihil percurriſſe, verùm etiam, quod regredi debeat per quatuor pedes, quò in fine temporis poſſit ad datam metam pervenire.

Ex quibus patet, quod, quum in reſolutione problematis invenitur æquatio, cujus radix eſt negativa, problema non ſit rite conceptum, ſed paulò aliter debeat enunciari. Qua ratione non quidem quæri debet, quantum habeat in bonis, ſed quantum ei deficiat, qui lucratus 100, reperitur habere 60. Et ſimiliter non quæri debet, quantum dati ſpatii debeat aliquis percurriſſe, ſed quantum regredi de-

debeat, quò possit quatuor gradibus velocitatis ad datum terminum pervenire eodem omnino tempore, quo alter tribus gradibus velocitatis ad eundem terminum pertingeret.

Eædem radices negativæ occurrunt etiam in æquationibus, quæ pro resolutione problematum geometricorum inveniuntur, & in hoc casu explicandæ sunt illæ per lineas, tendentes ad plagam oppositam ei, per quam diriguntur lineæ, radices positivas explicantes. Ita si recta linea AB producenda esset versus B, usque donec rectangulum ACB æquale fuerit AB quadrato; positis quidem AB $= a$, & BC $= x$, invenietur æquatio $ax + x^2 = a^2$, hoc est $x^2 + ax - a^2 = 0$, cujus duæ sunt radices, una nempe positiva, altera negativa: id quod indicat problema duas solutiones admittere, & rectam lineam AB protrahi posse non modò versus B, sed etiam versus plagam oppositã A.

FIG. 24.

Tam radices positivæ, quàm radices negativæ non semper sunt reales, sed quandoque possunt esse imaginariæ, scilicet quum eas ingreditur radix quadrati negativi. Ita æquationis hujus $x^2 - 6x + 10 = 0$, duæ quidem sunt radices, sed earum utraque est imaginaria. Nam ex nu-

numeris duobus, qui substituti in æquatione efficiunt omnes ejus terminos evanescere, unus est $3 + \sqrt{-1}$, alter est $3 - \sqrt{-1}$, quorum utrumque liquet imaginarium esse. Atque ita quoque æquationis hujus $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$ tres sunt radices, sed ex iis una tantùm est realis, aliæ verò duæ sunt imaginariæ; quum numeri, qui in æquatione illâ incognitæ conditiones adimplent, sint 2, $\sqrt{-4}$, & $-\sqrt{-4}$.

Quemadmodum autem radices negativæ ostendunt nobis, problema non esse ritè cōceptum, sed debere paulò aliter enūciari; ita radices imaginariæ indicio nobis esse possunt, problema in iis, in quibus proponitur, terminis contradictionem aliquam involvere, atque adeo moderandum esse aliquo modo, quò capax fiat solutionis. Non rarò enim contingit, ut id quod quæritur, etsi determinatum, nequeat inveniri iis conditionibus, quæ apponuntur in problemate. Unde, ne æquatio casus problematis impossibiles exhibeat possibiles, æquum est, ut radices, casus illos ostendentes, prodeant imaginariæ.

Id ut exemplo notissimum fiat, assumatur æquatio $x^2 - 2bx + a^2 = 0$ supe-

tet conditionem illam, quæ pugnat cum eo, quod quæritur, subinde temperare, ut evanescat contradictio, quæ antea solutioni problematis obstabat. Quod quidem perspicuum est, bifariam fieri posse, vel nempe minuendo datum intervallum, quousque non majus sit semidiametro circuli; vel, quod eodem recidit, sumendo datum intervallum ab aliâ rectâ lineâ, quàm à diametro.

Jam, quæ debeat esse hæc altera recta linea, à qua sumendum sit datum intervallum, quò problema sit semper capax solutionis, ostendit ipsa quantitas imaginaria $\sqrt{b^2 - a^2}$, quæ radicem ingreditur æquationis: nimirum ex centro circuli F erigatur super diametro AB perpendicularis FG, quæ quantitatem illam, ut realem, adæquet; & ductâ per punctum G rectâ lineâ HI ipsi AB parallela, erit HI recta linea quæsita. Nec ulli dubium esse potest, quin hoc casu recta linea DC circulum secet; nam quum fiat AG $= a$, distabit recta linea DC à centro intervallo, semper semidiametro AF minori.

Atque hinc modò patet veritas ejus, quod de quantitatibus imaginariis libro primo dictum est: nimirum, quod in Geo-

Geometriâ ſicuti quantitates poſitivæ deſignantur per lineas tendentes ad plagam unam, & negativæ per lineas tendentes ad plagam oppoſitam; ita quantitates imaginariæ deſignari debeant per lineas, quæ ad plagas intermedias diriguntur. Nam in propoſito exemplo quantitas $\sqrt{b^2 - a^2}$, quæ ſumi debet ſuper diametro AB hinc inde à centro F, quum a eſt minor, quàm b; ſumenda eſt hinc inde ab eodem centro ſuper recta Gg, quæ diametrum ſecat ad rectos angulos, quum viciſſim a eſt major, quàm b.

IV.

De conſtitutione æquationum, quarum plures ſunt radices.

Æquationes, quarum plures ſunt dimenſiones, & conſequenter plures radices, conſtituuntur per mutuam multiplicationem æquationum ſimplicium, quæ radices illas continent. Ut ſi ſciendum ſit, quomodo conſtituatur æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$, cujus duæ radices ſunt 2, & 3; cogitandum eſt, incognitam x ambiguè ſignificare numeros illos, & eſſe, tum $x = 2$, ſive $x - 2 = 0$, tum $x = 3$,

$x = 3$, five $x - 3 = 0$. Nam multiplicando deinde inter se mutuò duas istas æquationes $x - 2 = 0$, & $x - 3 = 0$, prodibit æquatio proposita $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Similiter, si quæratur, quæ sit constitutio hujus æquationis $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, in qua incognita x, tres habens dimensiones, tres item radices admittit, quæ sunt 2, 3, & 4; quia æquationes simplices, quæ illas continent radices, sunt $x = 2$, $x = 3$, & $x = 4$, hoc est $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, & $x - 4 = 0$; multiplico primum $x - 2 = 0$ per $x - 3 = 0$; tum productum ex duabus hisce æquationibus $x^2 - 5x + 6 = 0$ multiplico adhuc per $x - 4 = 0$, & habebitur tandem æquatio proposita $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$.

Nihilo secùs constituuntur æquationes, quarum radices sunt negativæ. Ita æquationis hujus $x^2 + 9x + 20 = 0$, ubi incognita x est duarum dimensionum; utraque radicum est negativa, quum una sit -4, altera -5. Unde, si fiat $x = -4$, five $x + 4 = 0$, & $x = -5$, five $x + 5 = 0$, multiplicando inter se mutuò duas istas æquationes $x + 4 = 0$, & $x + 5 = 0$, prodibit æquatio proposita x^2

$+ 9x + 20 = 0$.

Eadem ratione constituuntur etiam æquationes, quarum radices partim sunt positivæ, partim negativæ. Ut si ponatur $x = 2$, sive $x - 2 = 0$, & $x = -5$, sive $x + 5 = 0$, multiplicenturque inter se mutuò duæ istæ æquationes simplices $x - 2 = 0$, & $x + 5 = 0$, prodibit æquatio $x^2 + 3x - 10 = 0$, ubi incognita x duas habens dimensiones, præter valorem positivum 2, habebit quoque valorem alterum negativum -5.

Sed eadem est genesis æquationum, quarum plures sunt dimensiones, quotiescumque radices, sive valores incognitæ sunt incommensurabiles, ac radicales. Sic radices hujus æquationis $x^2 - 6x + 4 = 0$ sunt $3 + \sqrt{5}$, & $3 - \sqrt{5}$. Et profectò si multiplicentur inter se mutuò duæ istæ æquationes simplices $x - 3 - \sqrt{5} = 0$, & $x - 3 + \sqrt{5} = 0$, orietur ipsa æquatio proposita $x^2 - 6x + 4 = 0$.

Interim, quum radices alicujus æquationis sunt incommensurabiles, ac radicales, & sedes incommensurabilitatis est in eodem illo gradu, ad quem in æquatione propositâ ascendit incognita, potest æquatio illa constitui per unicam tantùm illarum radicum, nimirum si, per se-

regulam superiùs traditam, una ex æquationibus simplicibus, quæ continent radices illas, à radicalibus liberetur. Ita si assumatur æquatio $x - 3 - \surd 5 = 0$, & transferendo quantitatem radicalem ad alteram partem, attollatur utraque pars æquationis ad quadratum, fiet $x^2 - 6x + 9 = 5$, hoc est $x^2 - 6x + 4 = 0$.

Ubi tamen notandum, id fieri nequaquam posse, quum sedes incommensurabilitatis non est in eodem illo gradu, ad quem in æquatione propositâ ascendit quantitas incognita. Ita æquationis hujus $x^3 - 6x^2 + 2x + 12 = 0$ radices sunt 2, $2 + \surd 10$, & $2 - \surd 10$. Sed æquatio ista nequaquam constitui potest per æquationem simplicem $x - 2 - \surd 10 = 0$, vel per hanc aliam $x - 2 + \surd 10 = 0$, quia scilicet sedes incommensurabilitatis est quadratum, & incognita in æquatione ad tertiam dimensionem ascendit.

Sed, quæ sit sedes incommensurabilitatis, non tantùm à signis, quibus afficiuntur partes radicales, verùm etiam à numero, & constitutione ipsarum debet dijudicari. Ita una ex radicibus æquationis hujus $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$, ubi incognita quatuor habet dimensiones, est $\surd 2 + \surd 3$,

Et quamquam radicales istæ afficiantur signo quadratæ radicis, adhuc tamen æquatio proposita constitui potest per hanc solam æquationem simplicem $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$; nam ut ea liberetur à radicalibus, duæ ejus partes bis elevandæ sunt ad quadratum: ex quo fit, ut sedes incommensurabilitatis in eodem illo gradu reperiatur, ad quem in æquatione propositâ ascendit incognita.

Jam quum æquationes, quarum plures sunt radices, constituantur per multiplicationem æquationum simplicium, quæ radices illas continent; perspicuum est, æquationem omnem, quæ plures radices admittit, dividi semper posse per binomium, quod compositum sit ex quantitate incognitâ minus valore alicujus ex radicibus positivis, vel ex quantitate incognitâ plus valore alicujus ex radicibus negativis; quum id, quod multiplicatione componitur, rursus divisione resolvi posse, notissimum sit.

Ita æquationis hujus $x^2 + 3x - 10 = 0$ duæ quidem sunt radices, quarum una 2 est positiva, altera -5 est negativa. Itaque ad constituendam ipsam æquationem necesse est, multiplicare $x - 2 = 0$ per $x + 5 = 0$. Unde sicuti id, quod pro-

du-

ducitur, multiplicando $x - 2 = 0$ per $x + 5 = 0$, est æquatio $x^2 + 3x - 10 = 0$; ita dividendo ipsam æquationem $x^2 + 3x - 10 = 0$ per binomium $x - 2$, producetur $x + 5 = 0$; & dividendo eandem æquationem per hoc aliud binomium $x + 5$, orietur $x - 2 = 0$.

Hujus autem divisionis ope perspicuum est, dimensiones æquationis minui, ipsamque æquationem ad gradum inferiorem deprimi. Ita æquatio ista $x^3 - 19x + 30 = 0$, ubi incognita x tres habens dimensiones, tres item radices admittit, quæ sunt 2, 3, & -5, si dividatur per $x + 5$, hoc est per binomium constans incognitâ plus valore radicis negativæ, orietur hæc alia $x^2 - 5x + 6 = 0$, ubi incognita duas tantùm dimensiones habet. Et si rursus dividatur hæc altera per $x - 3$, hoc est per binomium, constans incognitâ minus valore unius ex radicibus positivis, remanebit æquatio simplex $x - 2 = 0$, quæ continet radicem alteram positivam.

Sed quemadmodum omnis æquatio dividi potest per binomium, compositum ex incognitâ minus valore unius ex radicibus positivis, vel ex incognitâ plus valore alicujus ex radicibus negativis.

ista sit una ex radicibus æquationis; positiva, quotiescumque conjungitur cum incognitâ signo $-$; & negativa, ubi cum incognitâ signo $+$ conjuncta reperitur. Nam id ex ipsâ, qua constituuntur æquationes, ratione non ita est manifestum; quum quemadmodum una, eademque quantitas multipliciter componi queat: ita suspicari aliquis posset, unam eandemque summam æquationis multipliciter posse constitui.

Dabimus itaque hujus rei duplicem demonstrationem, quarum prima hæc erit. Assumatur æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$, quæ quia dividi potest absque ullo residuo per $x - 3$. Dico fore $x - 3 = 0$, atque adeo $x = 3$. Inveniatur enim quotiens, qui oritur ex illâ divisione. Erit igitur ille $x - 2$. Itaque multiplicando $x - 2$ per $x - 3$, producitur quantitas $x^2 - 5x + 6$, quæ ex hypothesi nihilum adæquat. Quocirca duæ illæ quantitates tales esse debent, ut quod ex earum multiplicatione producitur, sit zero, sive nihilum: id quod fieri non potest, nisi fuerit tam $x - 3 = 0$, quàm $x - 2 = 0$.

Hoc idem ostendemus etiam in hunc modum. Assumatur æquatio quævis $x^2 + px + q = 0$, quæ dividi possit exactè abs-

absque ullo residuo per $x - a$. Dico fore $x - a = 0$, atque adeo $x = a$. Dividatur enim quantitas $x^2 + px + q$ per $x - a$. Et quoniam in divisione, quæ ex hypothesi fieri debet sine ullo residuo, remanet $a^2 + pa + q$, erit $a^2 + pa + q = 0$. Sed in hac æquatione si loco incognitæ a substituatur x, fient termini ejus $x^2 + px + q$, quorum summa est æqualis nihilo. Itaque, quia in æquatione $a^2 + pa + q = 0$ quantitas x adimplet conditiones ipsius a, erit $a = x$, atque adeo $x - a = 0$.

V.

Qua ratione species radicum æquationis cognosci possit, ostenditur.

Quot sint radices, sive valores in unaquaque æquatione, ex numero dimensionum ipsius æquationis dignosci posse jam superiùs indicavimus; quum omnis æquatio tot radices habere possit, quot sunt dimensiones ejus, & non plures. Et quamquam hujusmodi principium nullâ fuerit superiùs ratione suffultum; attamen ex traditâ æquationum constitutione: nimirum, quod oriantur per multiplicationem æquationum simplicium, quæ

Geometriâ ſicuti quantitates poſitivæ deſignantur per lineas tendentes ad plagam unam, & negativæ per lineas tendentes ad plagam oppoſitam; ita quantitates imaginariæ deſignari debeant per lineas, quæ ad plagas intermedias diriguntur. Nam in propoſito exemplo quantitas $\sqrt{b^2 - a^2}$, quæ ſumi debet ſuper diametro AB hinc inde à centro F, quum a eſt minor, quàm b; ſumenda eſt hinc inde ab eodem centro ſuper recta Gg, quæ diametrum ſecat ad rectos angulos, quum viciſſim a eſt major, quàm b.

IV.

De conſtitutione æquationum, quarum plures ſunt radices.

Æquationes, quarum plures ſunt dimenſiones, & conſequenter plures radices, conſtituuntur per mutuam multiplicationem æquationum ſimplicium, quæ radices illas continent. Ut ſi ſciendum ſit, quomodo conſtituatur æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$, cujus duæ radices ſunt 2, & 3; cogitandum eſt, incognitam x ambiguè ſignificare numeros illos, & eſſe, tum $x = 2$, ſive $x - 2 = 0$, tum

$x = 3$,

$x = 3$, sive $x - 3 = 0$. Nam multiplicando deinde inter se mutuò duas istas æquationes $x - 2 = 0$, & $x - 3 = 0$, prodibit æquatio proposita $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Similiter, si quæratur, quæ sit constitutio hujus æquationis $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, in qua incognita x, tres habens dimensiones, tres item radices admittit, quæ sunt 2, 3, & 4; quia æquationes simplices, quæ illas continent radices, sunt $x = 2$, $x = 3$, & $x = 4$, hoc est $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, & $x - 4 = 0$; multiplico primum $x - 2 = 0$ per $x - 3 = 0$; tum productum ex duabus hisce æquationibus $x^2 - 5x + 6 = 0$ multiplico adhuc per $x - 4 = 0$, & habebitur tandem æquatio proposita $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$.

Nihilo secùs constituuntur æquationes, quarum radices sunt negativæ. Ita æquationis hujus $x^2 + 9x + 20 = 0$, ubi incognita x est duarum dimensionum; utraque radicum est negativa, quum una sit -4, altera -5. Unde, si fiat $x = -4$, sive $x + 4 = 0$; & $x = -5$, sive $x + 5 = 0$, multiplicando inter se mutuò duas istas æquationes $x + 4 = 0$, & $x + 5 = 0$, prodibit æquatio proposita x^2

$+ 9x + 20 = 0$.

Eadem ratione constituuntur etiam æquationes, quarum radices partim sunt positivæ, partim negativæ. Ut si ponatur $x = 2$, sive $x - 2 = 0$, & $x = -5$, sive $x + 5 = 0$, multiplicenturque inter se mutuò duæ istæ æquationes simplices $x - 2 = 0$, & $x + 5 = 0$, prodibit æquatio $x^2 + 3x - 10 = 0$, ubi incognita x duas habens dimensiones, præter valorem positivum 2, habebit quoque valorem alterum negativum -5.

Sed eadem est genesis æquationum, quarum plures sunt dimensiones, quotiescumque radices, sive valores incognitæ sunt incommensurabiles, ac radicales. Sic radices hujus æquationis $x^2 - 6x + 4 = 0$ sunt $3 + \sqrt{5}$, & $3 - \sqrt{5}$. Et profectò si multiplicentur inter se mutuò duæ istæ æquationes simplices $x - 3 - \sqrt{5} = 0$, & $x - 3 + \sqrt{5} = 0$, orietur ipsa æquatio proposita $x^2 - 6x + 4 = 0$.

Interim, quum radices alicujus æquationis sunt incommensurabiles, ac radicales, & sedes incommensurabilitatis est in eodem illo gradu, ad quem in æquatione propositâ ascendit incognita, potest æquatio illa constitui per unicam tantùm illarum radicum, nimirum si, per re-

regulam superiùs traditam, una ex æquationibus simplicibus, quæ continent radices illas, à radicalibus liberetur. Ita si assumatur æquatio $x - 3 - \sqrt{5} = 0$, & transferendo quantitatem radicalem ad alteram partem, attollatur utraque pars æquationis ad quadratum, fiet $x^2 - 6x + 9 = 5$, hoc est $x^2 - 6x + 4 = 0$.

Ubi tamen notandum, id fieri nequaquam posse, quum sedes incommensurabilitatis non est in eodem illo gradu, ad quem in æquatione propositâ ascendit quantitas incognita. Ita æquationis hujus $x^3 - 6x^2 + 2x + 12 = 0$ radices sunt 2, $2 + \sqrt{10}$, & $2 - \sqrt{10}$. Sed æquatio ista nequaquam constitui potest per æquationem simplicem $x - 2 - \sqrt{10} = 0$, vel per hanc aliam $x - 2 + \sqrt{10} = 0$, quia scilicet sedes incommensurabilitatis est quadratum, & incognita in æquatione ad tertiam dimensionem ascendit.

Sed, quæ sit sedes incommensurabilitatis, non tantùm à signis, quibus afficiuntur partes radicales, verùm etiam à numero, & constitutione ipsarum debet dijudicari. Ita una ex radicibus æquationis hujus $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$, ubi incognita quatuor habet dimensiones, est $\sqrt{2} + \sqrt{3}$,

Et quamquam radicales istæ afficiantur signo quadratæ radicis, adhuc tamen æquatio proposita constitui potest per hanc solam æquationem simplicem $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$; nam ut ea liberetur à radicalibus, duæ ejus partes bis elevandæ sunt ad quadratum: ex quo fit, ut sedes incommensurabilitatis in eodem illo gradu reperiatur, ad quem in æquatione propositâ ascendit incognita.

Jam quum æquationes, quarum plures sunt radices, constituantur per multiplicationem æquationum simplicium, quæ radices illas continent; perspicuum est, æquationem omnem, quæ plures radices admittit, dividi semper posse per binomium, quod compositum sit ex quantitate incognitâ minus valore alicujus ex radicibus positivis, vel ex quantitate incognitâ plus valore alicujus ex radicibus negativis; quum id, quod multiplicatione componitur, rursus divisione resolvi posse, notissimum sit.

Ita æquationis hujus $x^2 + 3x - 10 = 0$ duæ quidem sunt radices, quarum una 2 est positiva, altera -5 est negativa. Itaque ad constituendam ipsam æquationem necesse est, multiplicare $x - 2 = 0$ per $x + 5 = 0$. Unde sicuti id, quod pro-

ducitur, multiplicando $x - 2 = 0$ per $x + 5 = 0$, est æquatio $x^2 + 3x - 10 = 0$; ita dividendo ipsam æquationem $x^2 + 3x - 10 = 0$ per binomium $x - 2$, producetur $x + 5 = 0$; & dividendo eandem æquationem per hoc aliud binomium $x + 5$, orietur $x - 2 = 0$.

Hujus autem divisionis ope perspicuum est, dimensiones æquationis minui, ipsamque æquationem ad gradum inferiorem deprimi. Ita æquatio ista $x^3 - 19x + 30 = 0$, ubi incognita x tres habens dimensiones, tres item radices admittit, quæ sunt 2, 3, & -5, si dividatur per $x + 5$, hoc est per binomium constans incognitâ plus valore radicis negativæ, orietur hæc alia $x^2 - 5x + 6 = 0$, ubi incognita duas tantùm dimensiones habet. Et si rursus dividatur hæc altera per $x - 3$, hoc est per binomium, constans incognitâ minus valore unius ex radicibus positivis, remanebit æquatio simplex $x - 2 = 0$, quæ continet radicem alteram positivam.

Sed quemadmodum omnis æquatio dividi potest per binomium, compositum ex incognitâ minus valore unius ex radicibus positivis, vel ex incognitâ plus valore alicujus ex radicibus negativis.

Ita vicissim si æquatio aliqua dividi possit per binomium, constans ex incognitâ plus, vel minus alterâ quantitate cognitâ, indicio nobis esse potest, quantitatem illam cognitam esse unam ex radicibus æquationis; positivam, siquidem conjugatur cum incognitâ signo —; negativam, si ad binomium constituendum signo + cum incognitâ conjuncta reperiatur.

Ut si fuerit æquatio $x^3 - 6x^2 - 7x + 60 = 0$, quia dividendo eam per $x - 4$, vel per $x - 5$ divisio fit exactè, quum in primo casu oriatur hæc altera $x^2 - 2x - 15 = 0$; in secundo verò ista $x^2 - 1x - 12 = 0$; concludo numeros 4, & 5 esse radices positivas propositæ æquationis. Et quia eadem æquatio dividi quoque potest per $x + 3$, quum oriatur in quotiente æquatio duarum dimensionum $x^2 - 9x + 20 = 0$, erit ejusdem æquationis radix negativa numerus 3.

Vicissim autem, si æquatio aliqua dividi non possit per binomium, compositum ex quantitate incognitâ plus, vel minus certâ aliâ quadam quantitate cognitâ; argumento erit, quantitatem hanc non esse valorem alicujus ex ejus radicibus. Ita æquatio superior $x^3 - 6x^2 - 7x + 60 = 0$ dividi quidem potest per $x - 4$, per

$x - 5$,

$x - 5$, & per $x + 3$, sed nullo modo dividi potest per x plus, vel minus quocumque alio numero : id, quod ostendit, æquationem ipsam non posse admittere alias radices, præter hasce tres 3, 4, & 5, quarum prior est negativa, aliæ verò duæ sunt positivæ.

Atque hinc ad cognoscendum, num aliqua quantitas sit radix alicujus æquationis, nec ne, non modo illud nobis velut criterium esse potest, scilicet inquirere, num substitutâ quantitate illâ loco incognitæ in æquatione, ejus conditiones adimpleat, hoc est, efficiat æquationis terminos omnes evanescere; verùm etiam obtineri potest talis cognitio ope divisionis, videlicet dividendo æquationem propositam per binomium, constans incognitâ plus, vel minus datâ illâ quantitate. Nam si divisio fiat absque ullo residuo, erit data illa quantitas una ex radicibus æquationis; secus verò, si divisio exactè fieri nequeat.

Verùm enim verò, ne ullum hic dubium Lectoribus maneat, demonstratione oportet fulciamur, quod si utique æquatio aliqua dividi possit per binomiũ, compositum ex incognitâ plus, vel minus datâ aliquâ quantitate, quantitas

ista sit una ex radicibus æquationis; positiva, quotiescumque conjungitur cum incognitâ signo —; & negativa, ubi cum incognitâ signo + conjuncta reperitur. Nam id ex ipsâ, qua constituuntur æquationes, ratione non ita est manifestum; quum quemadmodum una, eademque quantitas multipliciter componi queat: ita suspicari aliquis posset, unam eandemque summam æquationis multipliciter posse constitui.

Dabimus itaque hujus rei duplicem demonstrationem, quarum prima hæc erit. Assumatur æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$, quæ quia dividi potest absque ullo residuo per $x - 3$. Dico fore $x - 3 = 0$, atque adeo $x = 3$. Inveniatur enim quotiens, qui oritur ex illâ divisione. Erit igitur ille $x - 2$. Itaque multiplicando $x - 2$ per $x - 3$, producitur quantitas $x^2 - 5x + 6$, quæ ex hypothesi nihilum adæquat. Quocirca duæ illæ quantitates tales esse debent, ut quod ex earum multiplicatione producitur, sit zero, sive nihilum: id quod fieri non potest, nisi fuerit tam $x - 3 = 0$, quàm $x - 2 = 0$.

Hoc idem ostendemus etiam in hunc modum. Assumatur æquatio quævis $x^2 + px + q = 0$, quæ dividi possit exactè abs-

absque ullo residuo per $x - a$. Dico fore $x - a = 0$, atque adeo $x = a$. Dividatur enim quantitas $x^2 + px + q$ per $x - a$. Et quoniam in divisione, quæ ex hypothesi fieri debet sine ullo residuo, remanet $a^2 + pa + q$, erit $a^2 + pa + q = 0$. Sed in hac æquatione si loco incognitæ a substituatur x, fient termini ejus $x^2 + px + q$, quorum summa est æqualis nihilo. Itaque, quia in æquatione $a^2 + pa + q = 0$ quantitas x adimplet conditiones ipsius a, erit $a = x$, atque adeo $x - a = 0$.

V.

Qua ratione species radicum æquationis cognosci possit, ostenditur.

Quot sint radices, sive valores in unaquaque æquatione, ex numero dimensionum ipsius æquationis dignosci posse jam superiùs indicavimus; quum omnis æquatio tot radices habere possit, quot sunt dimensiones ejus, & non plures. Et quamquam hujusmodi principium nullâ fuerit superiùs ratione suffultum; attamen ex traditâ æquationum constitutione: nimirum, quod oriantur per multiplicationem æquationum simplicium,

quæ

quæ continent radices illas, facilè nunc erit illud oſtendere.

Si enim fieri poteſt, habeat æquatio aliqua duarum dimenſionum tres radices, quæ ſint $x - a = 0$, $x - b = 0$, & $x - c = 0$. Itaque ſi multiplicetur $x - a = 0$ per $x - b = 0$, producetur eadem æquatio, quæ utique orietur, multiplicando $x - a = 0$ per $x - c = 0$. Jam verò ex illâ multiplicatione oritur æquatio iſta $x^2 - ax - bx + ab = 0$, ex iſtâ profluit hæc altera $x^2 - ax - cx + ac = 0$. Igitur duæ iſtæ æquationes non erunt inter ſe mutuò diverſæ; adeoque conferendo terminos unius cum terminis alterius, habebuntur duæ aliæ æquationes $ax + bx = ax + cx$, & $ab = ac$, ex quarum altrerutrâ infertur $b = c$, hoc eſt, quod tertia radix aſſumpta ſit eadem cum ſecundâ.

Jam quæ ſit ſpecies radicum æquationis, quotieſcumque ſunt reales, & non imaginariæ, hoc eſt, quot ex iis radicibus ſint poſitivæ, & quot negativæ, cognoſci poteſt per hanc regulam; nimirum in omni æquatione tot poſitivas haberi poſſe, quot variationes reperiuntur ſignorum +, & −; & tot negativas, quot vicibus ibidem deprehenduntur duo ſigna

+,

$+$, vel duo signa $-$, quæ se invicem sequuntur. Quæ æquidem regula ex ipsâ, qua constituuntur æquationes, ratione abundè colligitur.

Ut si constituenda esset æquatio, quæ duas habeat radices positivas 2, & 3, supponendum esset $x = 2$, sive $x - 2 = 0$, & $x = 3$, sive $x - 3 = 0$; tum deinde multiplicandum $x - 2 = 0$ per $x - 3 = 0$, quum quæ inde producitur $x^2 - 5x + 6 = 0$ sit æquatio quæsita. Et quoniam in hac æquatione post terminum x^2, affectum signo $+$, habetur terminus $5x$, affectus signo $-$, quæ est una signorum variatio; & post terminum $5x$, affectum signo $-$, habetur terminus 6; affectus signo $+$, quæ est signorum variatio altera; liquet in æquatione istâ $x^2 - 5x + 6 = 0$, propter duas radices positivas, duas item signorum variationes reperiri.

Similiter, si constituere oporteat æquationem, quæ duas habeat radices negativas -2, -3, supponendum esset $x = -2$, sive $x + 2 = 0$, & $x = -3$, sive $x + 3 = 0$; tum deinde deberet multiplicari $x + 2 = 0$ per $x + 3 = 0$; quum æquatio, quæ ex hac multiplicatione producitur, $x^2 + 5x + 6 = 0$ sit illa, quam

quam oportet constituere. Et quoniam in hac æquatione post terminum x^2, affectum signo $+$, habetur terminus $5x$, similiter affectus signo $+$, post quem sequitur terminus 6, qui itidem afficitur signo $+$; perspicuum est in æquatione istâ $x^2 + 5x + 6 = 0$, propter duas radices negativas, duas esse similitudines signorum.

Atque ita quoque, si constituenda esset æquatio, ubi incognita præter radicem positivam 5, aliam habeat negativam -2, ponendum esset $x = 5$, sive $x - 5 = 0$, & $x = -2$, sive $x + 2 = 0$; tum deinde oporteret multiplicare $x - 5 = 0$ per $x + 2 = 0$, quum quæ inde producitur æquatio $x^2 - 3x - 10 = 0$ ea sit, quam oportet constituere. Et quoniam in hac æquatione post terminum x^2, affectum signo $+$, sequitur terminus $3x$, affectus signo $-$, post quem habetur terminus 10 affectus item signo $-$; liquet in æquatione istâ $x^2 - 3x - 10 = 0$, propter duas radices, positivam unam, negativam alteram, unam item signorum variationem, & unam signorum similitudinem reperiri.

Ad eundem itaque modum, si scire velim, quot sint radices positivæ, & quot negativæ in hac æquatione $x^4 - 4x^3 -$

19x³

$19x^2 + 106x - 120 = 0$, ubi incognita ad quatuor dimensiones ascendit, & consequenter quatuor radices admittit; considero signa, quibus termini ipsius afficiuntur. Et quia in eâ tres reperio signorum variationes, & unā signorum similitudinem; concludo ex quatuor radicibus tres esse positivas, & unam negativā. Quod quidem perspicuū est; nam radices quatuor illius æquationis sunt 2, 3, 4, & -5, quum unusquisq; horum numerorum incognitæ x conditiones adimpleat.

Sed hìc sedulò notandum est, regulam istam tunc demum sibi locum vindicare, quum radices omnes æquationis sunt reales; at ubi radices aliquæ fuerint imaginariæ, tunc regula nequaquā nobis usui esse potest. Sic in æquatione $x^2 - 2x + 10 = 0$, ubi incognita x duas radices debet habere, dispositio signorum indicat utramque illarum radicum esse positivam. Finge jam $x + 4 = 0$, & multiplica æquationem illam $x^2 - 2x + 10 = 0$ per $x + 4 = 0$, ut prioribus addatur una radix negativa, & prodibit æquatio ista $x^3 + 2x^2 + 2x + 40 = 0$, quæ deberet habere duas radices positivas, & unam negativam, quum tamen, si signa consideres, quibus termini ipsius afficiun-

ciuntur, omnes ejus radices sint negativæ. Quorsum itaque istud? nimirum quia radices duæ prioris æquationis $x^2 - 2x + 10 = 0$ non sunt reales, sed imaginariæ.

Cæterùm hæc eadem regula potest etiam applicari æquationibus, ubi aliquis ex terminis intermediis deficit; nimirum, si supponatur terminus ille deficiens primo affectus signo $+$, tum affectus signo $-$, & inveniantur in utraque hypothesi radices, quas cum termino illo deficiente ostendunt alii duo hinc inde existentes. Quum enim perinde sit, sive terminum illum deficientem consideres affectum signo $+$, sive signo $-$, si ex utraque hypothesi eædem radices eruantur, certum est radices illas tales esse, quales inveniuntur, ubi quidem æquationis radices sunt reales; quod si verò radices, quæ eruuntur ex utraque hypothesi, non sint eædem, tunc indicio nobis esse potest, duas illas radices imaginarias esse.

Ut si scire velim, cujus speciei sint duæ radices, quas admittit æquatio duarum dimensionum $x^2 - 9 = 0$; ubi secundus terminus deficit, suppono terminum illum deficientem primo affectum

signo

ſigno $+$; deinde affectum ſigno $-$. Et quia in utraque hypotheſi una ex radicibus prodit poſitiva, altera negativa; concludo æquationem $x^2 - 9 = 0$ unam habere radicem poſitivam, alteram negativam. Quod ſi verò proponatur æquatio $x^2 + 9 = 0$, quia ſupponendo terminum deficientem affectum ſigno $+$, utraque radicum prodit negativa, & viciſſim utraque poſitiva, quum ponitur affectus ſigno $-$; conſequens eſt, ut duæ illius æquationis radices non ſint reales, ſed imaginariæ.

Similiter, ſi ſcire velim, cujus ſpeciei ſint duæ radices, quæ erui debent ex tribus prioribus terminis hujus æquationis $x^3 - 19x - 30 = 0$, ubi radices omnes ſunt reales, ſuppono primùm, quod terminus deficiens afficiatur ſigno $+$, eritque illarum radicum una negativa, & altera poſitiva. Et quia ejuſdem prodeunt ſpeciei, quum terminus deficiens ponitur affectus ſigno $-$; concludo, radices illas tales reverà eſſe, atque adeo æquationem ipſam duas habere radices negativas, & unam poſitivam. Sed ſi proponatur æquatio $x^3 + 4x - 16 = 0$, quia non eædem ſunt radices, quæ in utrâque hypotheſi ex tribus prioribus terminis

eruun-

eruuntur, concludendum eſt, duas illas radices, non quidem reales, ſed imaginarias eſſe.

Atque ita quoque ſi ſcire cupiam, cujus ſpeciei ſint duæ radices, quæ colligi debent ex tribus poſtremis terminis hujus æquationis $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$, in qua omnes radices ſunt reales; conſidero primùm terminum deficientem affectum ſigno $+$, eritque illarum radicum una poſitiva, altera negativa. Et quoniam hujus etiam oriuntur ſpeciei, ubi terminus deficiens ponitur affectus ſigno $-$ concludo tales reverâ eſſe radices illas, ac proinde æquationem ipſam duas habere radices poſitivas, & unam negativam. Sed ſi proponatur æquatio $x^3 + 2x^2 + 32 = 0$, quia non eædem ſunt radices, quæ ex tribus poſtremis terminis in utrâque hypotheſi eruuntur, conſequens eſt, ut duæ ille radices ſint imaginariæ, & non reales.

Ex quibus liquet, traditam regulã pro cognoſcendâ ſpecie radicum, ubi unus terminorum deficit, cõtrahi poſſe in hunc modum: nimirum, quod ex duabus radibus, quas termini hinc inde exiſtentes exhibere debent cum termino deficiente, una ſit poſitiva, & altera negativa, quum di-

diverſa ſunt ſigna illorum terminorum, & æquationis radices ſunt reales; at verò, quod utraque ſit imaginaria, ſi eorundem terminorum eadem fuerint ſigna. Quotieſcumque enim diverſa ſunt ſigna terminorum, hinc inde à deficiente termino exiſtentium; tunc in utrâque hypotheſi una ex radicibus prodibit poſitiva, altera negativa. Sed, quum illorum terminorum ſigna ſunt eadem; eo caſu in unâ hypotheſi erunt ambæ poſitivæ, in alterâ ambæ negativæ.

Etſi autem ſit ſignum certiſſimum, duas illas radices imaginarias eſſe, quum termini, hinc inde poſiti à termino deficiente, eadem habuerint ſigna; non hinc tamen indicio ſemper eſſe poteſt, eaſdem illas radices reales eſſe, quotieſcumque eorundem terminorum diverſa fuerint ſigna. Ita æquationis hujus $x^2 - 4x + 6 = 0$ radices duæ ſunt imaginariæ: quocirca ſi multiplicetur per $x + 4 = 0$, quæ inde orietur æquatio $x^3 - 10x + 24 = 0$, duas habebit radices imaginarias, & unam realem negativam, quum tamen termini, hinc inde exiſtentes à termino deficiente, diverſa ſigna habere reperiantur. Itaque, ut concludi poſſit ex duabus illis radicibus unam eſſe poſi-

tivam, alteram negativam, nequaquam sufficit, diversa esse signa terminorum, hinc inde à deficiente termino existentium; verùm etiam opus est, ut æquationis radices sint reales.

Cæterùm ex traditâ regulâ cognoscendi, quot sint radices positivæ, & quot negativæ in omni æquatione, facilè erit efficere, ut in unâ, eâdemque æquatione radices omnes, quæ negativæ erant, evadant positivæ; & ut eâdem operâ omnes illæ, quæ positivæ erant, negativæ fiant: nimirum mutando signa omnia, quæ in secundo, quarto, sexto, aliisve terminis reperiuntur, qui per numeros pares designantur; reliquis primi, tertii, quinti, similiumque terminorum, qui designantur per numeros impares, non mutatis. Ut si loco hujus æquationis $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$, ubi incognita x tres habet radices positivas 2, 3, 4, & unam negativam -5, scribatur $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$, habebitur æquatio, in qua una tantùm est radix posititiva, quæ est 5, & tres reliquæ, quæ antea erant positivæ, nunc sunt negativæ.

Non-

VI.

Nonnulla circa radices imaginarias æquationum oſtenduntur.

PRiuſquam huic Capiti finem imponamus, oſtendenda ſunt nonnulla circa radices imaginarias æquationum. Et primò quidem, quod iſtarum radicum numerus ſemper ſit par: nimirum, quod in omni æquatione, quæ ſit legitimè reducta, ac præparata, nonniſi duæ, quatuor, ſex, &c. radices imaginariæ poſſint occurrere. Id in exẽplo ſuperiùs adducto de rectâ lineâ, quæ ducitur æquidiſtanter diametro circuli ad datum intervallum, abundè liquet. Nam radices duæ, quæ determinant duo puncta ſectionis, ſunt ambæ reales, quum datum intervallum eſt minus ſemidiametro circuli; fiunt æquales, quum idem intarvallum eſt æquale ſemidiametro; & verò evadunt ambæ imaginariæ, quum eâdem ſemidiametro fuerit majus. Sed generalem oportet hujus rei demonſtrationem afferamus.

Nimirum, quia æquatio ſupponitur legitimè reducta, ac præparata, in eâ ſicuti nulla erit quantitas realis radicalis,

ita nulla erit quantitas imaginaria. Itaque radices ipsius æquationis ejusmodi debent esse, ut quum eæ ad constituendam æquationem multiplicantur inter se mutuò, evanescat incommensurabilitas, evanescat contradictio radicum. Sed quum quantitates, quæ multiplicantur inter se mutuò, sunt imaginariæ, ipsarum contradictio nequit evanescere, nisi earundem numerus fuerit par; quum nonnisi duæ quantitates imaginariæ per se mutuò multiplicatæ producant quantitatem realem; & omnis quantitas imaginaria, ducta in quantitatem realem, producat quantitatem alteram similiter imaginariam. Quare in omni æquatione numerus radicum imaginariarum par semper esse debet.

Ex eo autem, quod radices imaginariæ occurrant in æquationibus semper in numero pari; perspicuum est æquationes illas, quæ sunt tertii, quinti, septimi, aut alterius cujusque imparis gradus, unam ad minimum radicem realem habere; nec proinde omninò impossibilia esse posse problemata, ad quæ æquationes illæ referuntur; quum iis fieri possit satis, saltem per radicem illam realem, quam illæ æquationes admittunt.

An

An non ergo exinde ratio eſt deducenda præclari illius theorematis, quod innuit vir ſummus Iſaac Newtonus in enumeratione linearum tertii ordinis, quod lineæ omnes ordinis primi, tertii, quinti, ſeptimi, & imparis cujuſque duo habeant ad minimum crura in infinitum verſus plagas oppoſitas progredientia? Nam utique lineæ iſtæ per æquationes ejuſdem gradus definiuntur; & norunt Geometræ crura linearum ad aliquem terminum ſiſti, nec ulteriùs progredi poſſe, quia ordinatæ ipſarum evadunt imaginariæ. Sed id fuſiùs oſtendere non eſt hujus loci, & ſufficiat illud indicaſſe.

Secundò radices imaginariæ æquationum poſſunt eſſe, vel puræ, vel mixtæ, ſive affectæ. Dicuntur puræ, quum nonniſi quantitates imaginarias continent. Vocantur verò mixtæ, ſive affectæ, quum ex realibus, & imaginariis conſtant. Ita æquationis hujus $x^2 + 3 = 0$ radices duæ ſunt imaginariæ, ſed earum utraque eſt pura, quum una ſit $\sqrt{-3}$, altera $-\sqrt{-3}$. Sed radices duæ alterius iſtius æquationis $x^2 - 4x + 6 = 0$ ſunt quidem imaginariæ, verùm utraque mixta, ſive affecta. Nam ſi transferatur ad alteram partem æquationis ultimus termi-

 nus

nus 6, & addatur utrique parti quadratum ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ, extrahendo hinc inde quadratam radicem, invenietur tum $x = 2 + \surd - 2$, tum $x = 2 - \surd - 2$.

Quemadmodum autem ex duabus radicibus alicujus æquationis, nequit una esse realis, & altera imaginaria, sed debent vel ambæ esse reales, vel ambæ imaginariæ; ita quoque ex duabus alicujus æquationis radicibus imaginariis, nequit esse una pura, & altera mixta, sed debent vel ambæ esse puræ, vel ambæ mixtæ; quum aliter contradictio non evanesceret. Quin etiam quemadmodum, quum utraque radicum imaginariarum est pura, ad tollendam contradictionem necesse est, ut communis utrique radici sit quantitas imaginaria; ita quoque quum ambæ radices sunt mixtæ, ut evanescat contradictio, oportet communem esse utrique radici tam quantitatem imaginariam, quàm quantitatem realem.

Sed sive radices duæ imaginariæ alicujus æquationis sint puræ, sive mixtæ, semper quantitas ipsa imaginaria, utrique radici communis, contrariis signis debet in iis reperiri. Quod exinde quoque colligi potest, quia si idem in il-

lis

lis signum haberet, contradictio non evanesceret, quotiescumque radices illæ ad constituendam æquationem multiplicantur per se mutuò. Et eâdem ratione si radices imaginariæ fuerint mixtæ, quantitas realis, utrique radci communis, debet eodem signo in iis reperiri. Ita si ponatur $x - 2 + \sqrt{-3} = 0$, & $x - 2 - \sqrt{-3} = 0$, atque duæ istæ æquationes multiplicentur per se mutuò; in ea, quæ producitur, evanescet quidem contradictio: pariterque evenascet, si æquationes simplices, quæ inter se mutuò multiplicantur, fuerint $x + 2 + \sqrt{-3} = 0$, & $x + 2 - \sqrt{-3} = 0$. Sed quocumque alio modo assumantur æquationes simplices, numquam equidem fieri poterit, ut per earum multiplicationem evanescat contradictio.

Atque hinc patet, æquationis secundi gradus, cujus duæ radices sunt imaginariæ, ultimum terminum signo + affectum esse oportere. Nam æquationes simplices, quæ per mutuam ipsarum multiplicationem constituere possunt æquationem secundi gradus, quæ habeat duas radices imaginarias, debent esse, vel hujus formæ $x - a + \sqrt{-b^2} = 0$, & $x - a - \sqrt{-b^2} = 0$; vel etiam alterius

istius $x + a + \sqrt{-b^2} = 0$, & $x + a - \sqrt{-b^2} = 0$: & profectò utroque casu æquatio, quæ producitur, habebit ultimum terminum affectum signo +. Nam quum fuerint prioris formæ, orietur æquatio $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$; quum verò fuerint formæ posterioris, producetur æquatio $x^2 + 2ax + a^2 + b^2 = 0$. Atque idem liquet quoque, si radices imaginariæ fuerint puræ; nam si multiplicetur $x - \sqrt{-b^2} = 0$ per $x + \sqrt{-b^2} = 0$, prodibit æquatio $x^2 + b^2 = 0$.

Jam quum ultimus terminus æquationis secundi gradus, cujus duæ radices sunt imaginariæ, affici debeat signo +; perspicuum est in iis æquationibus secundi gradus, in quibus ultimus terminus reperitur affectus signo −, radices duas nequaquaquam posse esse imaginarias. Sed non hinc generaliter colligi debet, imaginarias esse radices duas illius æquationis secundi gradus, cujus ultimus terminus vicissim afficitur signo +; quandoquidem id dumtaxat locum habet in iis æquationibus, in quibus ultimus terminus reperitur quidem affectus signo +, sed est major quadrato, quod fit ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ; ut patet in utrâque istarum

æqua-

æquationum $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$,& $x^2 + 2ax + a^2 + b^2 = 0$, in quibus radices duæ ſunt imaginariæ. Nam ultimus terminus $a^2 + b^2$ major eſt, quàm a^2 quadratum, quod fit ex ſemiſſe quantitatis cognitæ ſecundi termini.

Interim radices æquationis ſecũdi gradus, in qua deficit ſecundus terminus, & ultimus afficitur ſigno +, erunt ſemper imaginariæ. Quod quidem, etſi ex iis, quæ articulo antecedenti dicta ſunt, ſua ſponte ſequatur, quum termini, hinc inde exiſtentes à termino deficiente, eodem ſigno ſint affecti; idem tamen colligi quoque poteſt ex regulâ mox traditâ. Sunt enim radices duæ æquationis ſecundi gradus imaginariæ, quum ultimus terminus afficitur ſigno +, & eſt major quadrato, quod fit ex quantitate cognitâ ſecundi termini dimidiatâ. Unde quia, quum deficit ſecundus terminus, prædictum quadratum eſt etiam nullum, adeoq; ultimus terminus ipſo ſemper eſt major; proinde conſequens eſt, ut radices duæ æquationis ſecundi gradus, in qua deficit ſecundus terminus, & ultimus afficitur ſigno +, ſint ſemper imaginariæ.

De

CAP. IV.

De multiplici æquationum transformatione.

TRansformari dicimus æquationem aliquam, quum in aliam mutatur ejusdem gradus, cujus radices habeant datam quandam relationem cũ radicibus prioris: adeo, ut cognitis unius radicibus cognoscantur etiam radices alterius. Hujusmodi æquationum transformatio, quæ multifariam fieri potest, varios nobis suppetit usus, tum ad præparandas, ac reducendas, cum item ad resolvendas æquationes. Unde, veluti rem maximi momenti, visum est illam seorsim hoc capite prosequi.

Etsi autem variis modis transformari possint æquationes, nec scio num omnes queant exactè recenseri, præcipui tamen, & qui majoris usus esse videntur, ii sunt, qui fiunt additione, subtractione, multiplicatione, & divisione. Etsi enim radices alicujus æquationis nos lateant, possunt tamen datâ aliqua quantitate augeri, vel minui; aut etiam per datam aliquam quantitatem multiplicari, vel di-

dividi. Et profectò quum sic augentur vel minuuntur, aut in hunc modum multiplicantur, vel dividuntur; mutabitur ipsa æquatio in aliam, cujus radices ad radices prioris datam quandam habebunt relationem.

Itaque in hoc capite primò quidem explicabimus modos transformandi æquationes, qui fiunt additione, & subtractione, hoc est augendo, vel minuendo radices ipsarum datâ aliquâ quantitate; tum eos afferemus, qui fiunt multiplicatione, & divisione, hoc est multiplicando, vel dividendo radices earundem æquationem per datam aliquam quantitatem. Sed ut intelligant Tyrones quorsum hæc omnia tendant, propriis suis locis usus etiam indicabimus, qui ex hujusmodi transformationibus deducuntur,

I.

De transformationibus æquationum, quæ fiunt additione, & subtractione.

Additione, vel subtractione transformantur æquationes, quum radices ipsarum, quantumvis incognitæ, datâ aliquâ quantitate augentur, vel minuun-

nuuntur. Jam autem ad augendas, vel minuendas radices alicujus æquationis datâ aliquâ quantitate, oportet tantùm in locum incognitæ quantitatis ſubſtituere aliam auctam, vel diminutam datâ illâ quantitate; nimirum auctam, ſi radices propoſitæ æquationis minuendæ ſint quantitate illâ datâ; & diminutam, ſi viciſſim ſint augendæ: atque loco prioris incognitæ hanc aliam ſic auctam, vel diminutam ubique in æquatione ſubrogare.

Ut ſi augere velim numero ternario radices hujus æquationis $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, quæ oritur ex multiplicatione trium iſtarum $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, & $x - 4 = 0$; loco incognitæ x ſumenda eſt alia y, & cogitandum aliam iſtã cognitam y majorem eſſe, quàm x, ipſo numero ternario: adeo, ut habeatur $x + 3 = y$, ſive $x = y - 3$. Nam ſi deinde in æquatione ipſâ loco x ſcribamus $y - 3$, loco x^2 quadratum ex $y - 3$, quod eſt $y^2 - 6y + 9$, & loco x^3 cubum ex $y - 3$, qui eſt $y^3 - 9y^2 + 27y - 27$, quemadmodum factum hìc vides, prodibit loco ipſius

$+ x^2$

$$\begin{array}{lrrrr}
+x^3 & y^3 & -9y^2 & +27y & -27 \\
-9x^2 & & -9y^2 & +54y & -81 \\
+26x & & & +26y & -78 \\
-24 & & & & -24 \\
\hline
\end{array}$$

hæc altera $y^3 - 18y^2 + 107y - 210 = 0$, cujus radices numero ternario superant radices illius.

Sunt enim radices propositæ æquationis $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ numeri isti 2, 3, & 4; nam quisque horum numerorum, substitutus in æquatione ipsâ loco incognitæ x, ejus conditiones adimplet, faciendo, ut æquationis termini omnes contrarietate signorum se mutuò destruant. Unde si radices alterius hujus æquationis $x^3 - 18y^2 + 107y - 210 = 0$ ternario excedant radices illius, eas utiq;non alias esse oportet, quàm 5, 6, & 7: proindeque quia quilibet horum numerorum, subrogatus in æquatione loco incognitæ y, præstat illud idem, quod præstare debet incognita, liquet utique propositum.

Similiter, si minuere velimus numero binario radices hujus æquationis $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$, sumenda est loco incognitæ x alia y, putandumque hanc aliam

aliam incognitã y majorem esse, quàm x, ipso numero binario: adeo, ut habeatur $x = y + 2$. Nam si deinde in æquatione ipsâ scribatur $y + 2$ loco x, $y^2 + 4y + 4$ loco x^2, & $y^3 + 6y^2 + 12y + 8$ loco x^3, quemadmodum hìc factum vides, orietur

$$\begin{array}{ll} + x^3 & y^3 + 6y^2 + 12y + 8 \\ - 12x^2 & - 12y^2 - 48y - 48 \\ + 47x & + 47y + 94 \\ - 60 & - 60 \end{array}$$

hæc altera $y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0$, cujus radices numero binario deficiunt à radicibus illius.

Sunt enim radices propositæ æquationis $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$ numeri isti 3, 4, & 5; quum quisque horum numerorum, substitutus in æquatione loco ipsius incognitæ x, adimpleat ejus conditiones, efficiendo, ut æquationis termini omnes contrarietate signorum se mutuò destruant. Itaque, si radices alterius hujus æquationis $y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0$ numero binario deficiant à radicibus illius, eæ utique non aliæ poterunt esse, quàm 1, 2, & 3. Unde, quia quilibet horum numerorum, substitutus in æquatione loco incognitæ y, adimplet condi-

ditiones ipſius incognitæ; conſequens eſt, ut radices æquationis revera ſint numeri 1, 2, & 3.

Jam augendo hac ratione radices æquationis, perſpicuum eſt, quod ſi in æquatione radices partim ſint poſitivæ, partim negativæ, poſitivæ quidem augeantur, negativæ verò minuantur eâdem quantitate. Sic in æquatione iſtâ $x^2 + 4x - 12 = 0$, in qua una ex radicibus 2 eſt poſitiva, altera 6 eſt negativa, ſi velim augere numero binario radices ipſius, mutabitur ea in hanc aliam $y^2 - 2y - 15 = 0$, in qua radix poſitiva, utpote 5, eſt aucta numero ternario, ſed radix negativa, utpotè 3, eſt diminuta numero ternario.

Neque mirum; nam quantitates negativæ per additionem aliarum poſitivarum minuuntur, & non augentur. Sed augendo radices æquationis datâ aliquâ quantitate, poteſt etiam una ex radicibus negativis prorſus evaneſcere, nimirum, ſi data illa quantitas aliquam ex radicibus negativis adæquet. Quin etiam ſi quantitas, qua augeri debent radices æquationis, fuerit major unâ radicum negativarum, tunc radix illa ex negativâ fiet poſitiva.

Hinc

Hinc, si quantitas, qua augentur radices æquationis, fuerit major unaquaque radicum negativarum, tunc omnes illæ radices fient positivæ, & termini illius, in quam mutatur æquatio proposita, signa +, & — alternatim habebunt. Unde vicissim, si augendo radices alicujus æquationis, alia oriatur, cujus termini habeant alternatim signa +, & —; tunc certum erit, quantitatem illam, qua augentur, unamquamque radicum negativarum excedere; atque hac ratione perspicuum est, nullo negotio cognosci posse, intra quem terminum radices negativæ alicujus æquationis consistant.

Vicissim autem minuendo radices æquationis datâ aliquâ quantitate, perspicuum est, quod si æquatio radices admittat partim positivas, partim negativas, positivæ quidem minuantur, negativæ verò augeantur eâdem quantitate. Sic in æquatione istâ $x^2 - 2x - 15 = 0$, in qua una ex radicibus 5 est positiva, altera 3 est negativa, si velim minuere numero ternario radices ipsius, mutabitur ea in hanc aliam $y^2 + 4y - 12 = 0$, in qua radix positiva, utpote 2, est diminuta numero ternario, sed radix negativa, utpote 6, est aucta eodem numero ternario.

Quod

Quod rursus non mirum videri debet; nam quantitates negativæ per subductionem aliarum positivarum augentur, & non minuuntur. Sed minuendo radices æquationis datâ aliquâ quantitate, fieri potest, ut una ex radicibus positivis prorsus evanescat, nimirum si data illa quantitas radicum positivarum aliquam adæquet. Quin etiam si quantitas, qua minui debent radices æquationis, fuerit major unâ ex radicibus positivis, tunc radix illa ex positivâ fiet negativa.

Hinc, si quantitas, qua minuuntur radices æquationis, fuerit major unaquaque radicum positivarum, tunc omnes illæ radices fient negativæ, & termini illius, in quam mutatur æquatio proposita, omnes afficientur signo +. Unde vicissim, si minuendo radices æquationis, alia oriatur, cujus termini omnes afficiantur signo +; certum erit, quantitatem illam, qua minuuntur, unamquamque radicum positivarum excedere: atque hac ratione facilè quoque erit inquirere, intra quem terminum consistant radices positivæ alicujus æquationis.

Cæterùm, quia non rarò usuveniet, ut ejus, in quam mutatur æquatio proposita, augendo, vel minuendo radices

 ipsius

ipsius, dumtaxat ultimus terminus sciri debeat; proinde non abs re erit hìc adnotare, ultimum hunc terminum nullo negotio haberi posse, si tãtùm in æquatione propositâ scribatur loco incognitæ ipsa quãtitas, qua radices augeri debent, vel minui. Sed in hac substitutione considerari debet quantitas illa, velut affecta signo —, quotiescumque radices augendæ sunt eâ quantitate; & verò consideranda est velut affecta signo +, quum radices eâdem illâ quantitate minui debent.

Hac ratione, si radices istius æquationis $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ augendæ sint numero ternario, prodibit loco ejus hæc alia $y^3 - 18y^2 + 107y - 210 = 0$, cujus ultimus terminus est -210: & profectò si in ipsâ æquatione $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ ponatur -3, ubicumque reperitur x, fient termini ejus $-27 - 81 - 78 - 24$, quorum summa est -210. Atque ita quoque, si radices istius æquationis $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$ minuendæ sint numero binario, habebitur loco ejus hæc alia $y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0$, cujus ultimus terminus est -6; & si utique in ipsâ æquatione $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$, ponatur 2, ubicumque reperitur x, fient termi-

ni

ni ejus 8 — 48 + 94 — 60, quorum summa tantundem valet, ac — 6.

II.

Qua ratione secundus terminus æquationis tolli possit, ostenditur.

Transformationes æquationum, quæ fiunt additione, & subtractione, hoc est augendo, & minuendo radices æquationum datâ aliquâ quantitate, varios nobis suppetunt usus; potissimùm tamen in id nobis inserviunt, quod ipsarum ope tolli semper possit secundus terminus ex omni æquatione. Si enim radices alicujus æquationis, ubi secundus terminus afficitur signo +, augeantur quantitate cognitâ secundi termini, divisâ per numerum, ipsius æquationis gradum ostendentem; jam nova orietur æquatio, in qua deficiet secundus terminus. Et similiter, si radices alicujus æquationis, in qua secundus terminus reperitur affectus signo —, minuantur eâ parte quantitatis cognitæ secundi termini, quam ostendit idem gradus æquationis, nova etiam prodibit æquatio, secundo termino carens.

 Pro-

co x, $y^2 + 4y + 4$ loco x^2, & $y^3 + 6y^2 + 12y + 8$ loco x^3. Qua ratione hæc alia prodibit æquatio $y^3 - 28y + 38 = 0$, in qua non modò radices diminutæ reperiuntur numero binario, verùm etiam ſecundus terminus deeſt.

Itaque, quia radices alicujus æquationis augentur datâ aliquâ quantitate, ſi loco incognitæ, in æquatione contentæ, alia ſubſtituatur quãtitate illâ diminuta; & viciſſim radices alicujus æquationis minuuntur datâ quâdam quantitate, ſi in ipsâ æquatione loco incognitæ alia ſubrogetur, aucta quantitate illâ: perſpicuum eſt, quod ex unaquaque æquatione tollecur ſecundus terminus, ſi loco incognitæ ipſius æquationis ſubſtituatur incognita altera, aucta, vel diminuta eâ parte quantitatis cognitæ ſecundi termini, quam oſtendit gradus æquationis: nimirum aucta, ſi ſecundus terminus ſit affectus ſigno —, & viciſſim diminuta, ſi afficiatur ſigno +.

Hujus regulæ rationem adſcribere, ſuſuperfluum exiſtimo; quum nemo, opinor, ſit, qui illam non percipiat, ſi ſedulò attẽdat ad hæc duo. Primum, quod ſi quantitas quæcumque, duabus partibus conſtans, ad poteſtatem aliquam attollatur,

partes illæ in terminis intermediis ad omnes alias poteſtates inferiores ordine elevatæ reperiantur. Et alterum, quod in quacumque poteſtate radicis, duabus partibus conſtantis, coefficiens ſecundi termini ſit ipſe poteſtatis exponens. Ex his quippe duobus principiis, à nobis jam ſuperiùs oſtenſis, adducta regula facili negotio derivatur.

Cæterùm in examinandis æquationibus, præſtat ex iis ſecundum terminum tollere, quia hac ratione omnes alicujus gradus æquationes ad pauciorem numerum reducuntur. Ita æquationes ſecundi gradus, ſi omnibus terminis ſint repletæ, pro diverſitate ſignorum, quibus affici poſſunt ipſarum termini, ad has quatuor formulas reducuntur.

$$x^2 - px - q = 0$$
$$x^2 + px - q = 0$$
$$x^2 - px + q = 0$$
$$x^2 + px + q = 0,$$

quum tamen, ſi tollatur ex iis ſecundus terminus, vel induent hanc formam $x^2 - q = 0$, in qua una radix eſt vera, altera falſa; vel etiam hanc aliam $x^2 + q = 0$, cujus ambæ radices ſunt imaginariæ.

Si-

Similiter, si in æquationibus tertii gradus nullus desit terminorum intermediorum; possunt omnes pro diversitate signorum, quibus ipsarum termini affici queunt, ad sequentes octo formulas revocari

$$x^3 - qx^2 + rx - s = 0$$
$$x^3 + qx^2 - rx - s = 0$$
$$x^3 - qx^2 - rx - s = 0$$
$$x^3 + qx^2 + rx - s = 0$$
$$x^3 - qx^2 + rx + s = 0$$
$$x^3 + qx^2 - rx + s = 0$$
$$x^3 - qx^2 - rx + s = 0$$
$$x^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

quum tamen si ex iis auferatur secundus terminus, reduci poterunt ad aliquam sequentium quatuor formularum.

$$x^3 + px - q = 0$$
$$x^3 - px - q = 0$$
$$x^3 - px + q = 0$$
$$x^3 + px + q = 0.$$

Sed auferendo secundum terminum ex æquationibus secundi gradus, non modò ad pauciorem numerum reducuntur, verùm etiam hoc ampliùs obtinetur, quod earum resolutio nullo negotio perfici

possit. Quotiescumque enim in æquatione secundi gradus secundus terminus deficit, ipsius resolutio nullam difficultatem involvit, quum satis sit ex utraque parte æquotionis quadratam radicem elicere. Itaque si ex unaquaq; secundi gradus æquatione auferatur secundus terminus, poterit hoc artificio resolutio ejus obtineri.

Proponatur, exempli gratia, resolvenda æquatio secundi gradus $x^2 - 4x - 6 = 0$. Tollatur ex eâ secundus terminus, ponendo $y + 2$ loco x, & $y^2 + 4y + 4$ loco x^2. Prodibit itaque hac facta substitutione altera isthæc æquatio $y^2 - 10 = 0$, sive $y^2 = 10$, ex cujus utraque parte si extrahatur quadrata radix, fiet vel $y = \sqrt{10}$, vel $y = -\sqrt{10}$. Et quoniam x idem est, ac $y + 2$; erit quoque vel $x = 2 + \sqrt{10}$, vel $x = 2 - \sqrt{10}$: proindeque radices duæ æquationis propositæ erunt $2 + \sqrt{10}$, & $2 - \sqrt{10}$.

Sed nolim hìc silentio præterire, quod quum secundus æquationis terminus afficitur signo $-$, possit aliâ quoque ratione ille terminus tolli: nimirum si loco incognitæ, in æquatione contentæ, ponatur ea pars quantitatis cognitæ secundi termini, quàm ostendit gradus æquationis, di-

diminuta aliâ quantitate incognitâ. Ita si proponatur æquatio $x^2 - 4x - 6 = 0$, & in eâ ponatur $y + 2$ loco x, & $y^2 + 4y + 4$ loco x^2, prodibit æquatio $y^2 - 10 = 0$, in qua secundus terminus deficit. Sed eadem æquatio invenietur etiam, si ponatur $2 - y$ loco x, & $4 - 4y + y^2$ loco x^2.

Interim notare oportet hoc loco, quod quum hac ratione tollitur secundus terminus, radices æquationis positivæ evadant negativæ, sed diminutæ quantitate illâ cognitâ, quæ ad tollendum secundum terminum adhibetur; vicissim verò radices negativæ evadant positivæ, sed auctæ eâdem illâ quantitate. Sit etenim $x - a = 0$ radix una positiva alicujus æquationis, & $x + b = 0$ radix altera negativa. Itaque si fiat $x = c - y$, erit $c - y - a = 0$, & $c - y + b = 0$, hoc est $y + a - c = 0$, & $y - b - c = 0$. Unde radix positiva a versa est in negativam, diminutam quantitate c; radix verò negativa b prodiit positiva, aucta eâdem quantitate. Differre autem hunc modum transformandi æquationes ab utroque antecedentium, etiamsi fiat subtractione, nemo non videt.

III.

Qua ratione per analysim quisque terminus æquationis tolli possit, ostenditur.

Regula mox tradita usui nobis esse potest dumtaxat, quum ex æquatione secundus terminus tolli debet: si enim oporteat, ex æquatione alium quemcumque terminum tollere, multum abest, ut eâdem regulâ illud possit obtineri. Interim ne, si id fortè fieri contingat, hæreat Analysta, ostendemus hìc, qua ratione tolli possit per analysim quilibet terminus ex quacumque æquatione propositâ. Nam regulas pro quolibet termino cudere, nec tam commodè fieri potest, nec si utique fieri posset, ad rem esse existimamus.

Hunc in finem consideremus primò, regulâ superiùs traditâ tolli secundum terminum ex qualibet æquatione, si radices ipsius æquationis augeantur, vel minuantur eâ parte quantitatis cognitæ secundi termini, quam æquationis gradus ostendit; quum hac ratione alia loco ejus oriatur, in qua secundus terminus nequaquam occurret. Quare, ut ex aliqua æqua-

æquatione datus quicumque terminus tolli possit, determinari tantùm debet quantitas cognita, qua radices æquationis augendæ sint, aut minuendæ, quo terminus ille in eâ, in quam transmutatur æquatio proposita, prorsus evanescat.

Jam quantitas ista cognita, qua augeri, aut minui debent radices æquationis, ut in eâ, in quam transmutatur, deficiat terminus assignatus, determinabitur per analysim in hunc modum. Assumatur quantitas illa indeterminatè; eâque augeantur, aut minuantur radices æquationis. Quia ergo quantitas illa talis esse debet, ut per eam evanescat terminus assignatus, ponatur post transformationem æquationis terminus ille æqualis zero, sive nihilo: qua ratione habebitur æquatio, quæ quantitatis illius indeterminatæ valorem exhibebit.

Id ut clariùs intelligatur, dabimus primò hujus methodi specimen in eodem illo casu, in quo tradita superiùs regula valet, nimirum, quum secundus terminus ex æquatione tolli debet. Itaque oporteat ex æquatione istâ $x^2 - ax + b^2 = 0$ secundum terminum tollere. Fiat $x = y + c$, vel etiam $x = y - c$. Parum enim refert, quo signo ponatur affecta quan-

quantitas illa indeterminata, cum qua æquatio proposita transformanda est; nam id ipsum determinabitur etiam ab æquatione, quæ invenitur, supponendo post factam transformationem secundum terminum æqualem zero, sive nihilo.

Itaque si in æquatione propositâ $x^2 - ax + b^2 = 0$ ponatur $y + c$ loco x, & $y^2 + 2cy + c^2$ loco x^2, habebitur loco ejus hæc altera æquatio $y^2 + 2cy - ay + c^2 - ac + b^2 = 0$. Quare supponendo secundum terminum $+ 2cy - ay$ æqualem zero, sive nihilo, fiet $2cy - ay = 0$, hoc est $2cy = ay$, & $2c = a$. Unde quum quantitas c adæquet semissem ipsius a; liquet ex æquatione propositâ tolli secundum terminum, si radices ejus minuantur quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ.

Oporteat similiter ex æquatione istâ $x^3 + ax^2 - a^2x - ab^2 = 0$ secundum terminum tollere. Fiat $x = y + c$, & ponatur in ipsâ æquatione $y + c$ loco x, $y^2 + 2cy + c^2$ loco x^2, & $y^3 + 3cy^2 + 3c^2y + c^3$ loco x^3. Itaque loco propositæ æquationis habebitur hæc alia $y^3 + 3cy^2 + ay^2 + 3c^2y + 2acy - a^2y + c^3 + ac^2 - a^2c - ab^2 = 0$. Unde supponendo secundum terminum æqualem zero, sive ni-

nihilo, fiet $3cy^2 + ay^2 = 0$, hoc eſt $3cy^2 = -ay^2$, & $3c = -a$. Unde quum quantitas c adæquet trientem ipſius $-a$, perſpicuũ eſt ex æquatione propoſitâ tolli ſecundum terminum, ſi radices ejus augeantur triente quantitatis cognitæ ſecundi termini.

Sed applicemus modò eandem methodum aliis quoque caſibus, nimirum quum alius quilibet terminus, quàm ſecundus, tolli debet ex æquatione. Itaque oporteat ex eadem æquatione $x^3 + ax^2 - a^2x - ab^2 = 0$ tertium terminum tollere. Et quoniam ea, in quam ipſa tranſmutatur, ponendo $x = y + c$, eſt $y^3 + 3cy^2 + ay^2 + 3c^2y + 2acy - a^2y + c^3 + ac^2 - a^2c - ab^2 = 0$, ponatur in iſtâ tertius terminus $3c^2y + 2acy - a^2y$ æqualis zero, ſive nihilo. Itaque erit $3c^2y + 2acy - a^2y = 0$, hoc eſt $3c^2 + 2ac - a^2 = 0$: Unde reducendo, ac reſolvendo æquationem iſtam, determinabitur valor ipſius c.

Nihilo ſeciùs tolletur per analyſim quartus terminus ex iſtâ æquatione $x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^2bx + a^4 = 0$. Ponatur enim $x = y + c$. & in ipsâ æquatione ſcribatur $y + c$ loco x, $y^2 + 2cy + c^2$ loco x^2, $y^3 + 3cy^2 + 3c^2y + c^3$ loco x^3,

& y^4

& $y^4 + 4cy^3 + 6c^2y^2 + 4c^3y + c^4$ loco x^4. Sic enim orietur hæc altera æquatio $y^4 + 4cy^3 - ay^3 + 6c^2y^2 - 3acy^2 + a^2y^2 + 4c^3y - 3ac^2y + 2a^2cy - a^2by + c^4 - ac^3 + a^2c^2 - a^2bc + a^4 = 0$, in qua si utique ponatur quartus terminus æqualis zero, sive nihilo, fiet $4c^3y - 3ac^2y + 2a^2cy - a^2by = 0$, hoc est $4c^3 - 3ac^2 + 2a^2c - a^2b = 0$, quæ quidem æquatio legitimè reducta, ac resoluta ipsius c valorem exhibebit.

Notetur autem hoc loco velim, quod sicuti ad determinandam quantitatem, cum qua æquatio proposita debet transformari, ut ejus secundus terminus evanescat, invenitur æquatio primi gradus; sic ad determinandã eandem quantitatẽ, quum tolli debet quilibet alius terminus, invenietur semper æquatio talis, ut gradum ejus ostendat locus ipse, quem occupat in æquatione tollendus terminus, si unitate unâ minuatur. Unde quum in omni æquatione numerus terminorum designetur à numero dimensionum, aucto unitate unâ; perspicuum est ad tollendum ultimum terminum ex datâ quacumque æquatione, resolvendam esse æquationem, quæ sit ejusdem gradus cum æquatione propositâ.

Sed

Sed notatu hìc quoque dignum existimamus, quod æquatio illa, quæ invenitur pro determinandâ quantitate, cum qua transformari debet æquatio aliqua, ut ejus ultimus terminus evanescat, non modò sit ejusdem gradus cum æquatione propositâ, verùm etiam ab ipsâ non differat. Notavimus namque suprà, quod si, exempli gratiâ, in æquatione istâ $x^3 - ax^2 + abx - abc = 0$ loco incognitæ x ponendum esset $y + m$, ultimus terminus ejus, in quam illa transformatur, sit quantitas, quæ prodit, substituendo in ipsâ æquatione m pro x. Itaque facta hac substitutione, erit ultimus terminus $m^3 - am^2 + abm - abc$; & propterea æquatio, pro determinandâ quantitate m, erit $m^3 - am^2 + abm - abc = 0$, quam liquet eandem esse cum ipsâ æquatione propositâ.

Neque verò obscura est ratio hujus rei. Nam, ut ex aliquâ æquatione ultimus terminus tolli possit, necesse est radices ejus, vel augere quantitate, quæ unam radicum negativarum adæquet, vel etiam minuere quantitate, quæ sit æqualis uni radicum positivarum; quum utroque casu evanescat in æquatione radix illa, cui æqualis est quantitas, qua radices æqua-

quationis augentur, vel minuuntur; atque adeo dempto ultimo termino, æquatio ipsa ad gradum inferiorem deprimatur. Itaque, ut determinetur quantitas illa, qua augendæ sunt, vel minuendæ radices alicujus æquationis, ut ultimus ejus terminus evanescat, necesse est ipsas propositæ æquationis radices invenire: quæ utique inveniri non possunt, nisi per ipsam æquationem prpositam, aut per aliam, quæ non differat ab eâ.

IV.

De transformationibus æquationum, quæ fiunt multiplicatione, & divisione.

Quemadmodum transformãtur æquationes additione, vel subtractione, augendo, vel minuendo radices ipsarum datâ aliquâ quantitate; sic fiet æquationum transformatio multiplicatione, vel divisione, quotiescumque eædem radices per datam aliquam quantitatem multiplicantur, vel dividuntur. Unde, ut intelligant Tyrones, qua ratione transformentur æquationes multiplicatione, & divisione; satis erit ostendere, quo pacto radices alicujus æquationis per

per datam aliquam quantitatem multiplicari, aut dividi possint.

Itaque ad multiplicandum radices alicujus æquationis per datam aliquam quantitatem, oportet tantum in locum incognitæ quantitatis, in æquatione contentæ, aliam substituere, quæ per datam illam quantitatem sit divisa. Ut si fuerit x incognita æquationis propositæ, & data quantitas sit a, assumenda est incognita alia y, & loco x ponendum ubique $\frac{y}{a}$. Neque dubium esse potest, quin hac factâ substitutione, unaquæque radix reperiatur multiplicata per a. Nam quum ex hypothesi sit $x = \frac{y}{a}$, erit $ax = y$.

Oporteat, exempli gratia, radices hujus æquationis $x^2 - ax - bx + ab = 0$, quæ sunt a, & b, multiplicare per quantitatem cognitā c. Supponatur $cx = y$, hoc est $x = \frac{y}{c}$; tum in ipsâ æquatione ponatur $\frac{y}{c}$ loco x, & $\frac{y^2}{c^2}$ loco x^2: Quâ factâ

ſubſtitutione, orietur hæc alia æquatio $\frac{y^2}{c^2} - \frac{ay}{c} - \frac{by}{c} + ab = 0$, quæ fiet $y^2 - acy - bcy + abc^2 = 0$, ſiquidem omnes ejus termini multiplicentur per c^2. Unde, quum radices hujus æquationis ſint ac, & bc; liquet, radices æquationis propoſitæ in hac alterâ multiplicatas eſſe per datam quantitatem c.

Oporteat ſimiliter, radices alterius hujus æquationis $x^2 - 5x + 6 = 0$, quæ ſunt 2, & 3, multiplicare per numerum 4. Supponatur $4x = z$, vel quod idem eſt $x = \frac{z}{4}$; deinde in ipsâ æquatione ſubſtituatur $\frac{z}{4}$ loco x, & $\frac{z^2}{16}$ loco x^2: quâ peractâ ſubſtitutione, producetur hæc altera æquatio $\frac{z^2}{16} - \frac{5z}{4} + 6 = 0$, quæ fiet $z^2 - 20z + 96 = 0$, ſi utique omnes termini ejus multiplicentur per 16. Unde quia radices hujus æquationis ſunt 8, & 12; liquet radices propoſitæ æquationis in hac alterâ multiplicatas eſſe per 4.

Sed

Sed notetur hoc loco velim, eam, in quam mutatur æquatio proposita, quum radices ipsius per datam aliquam quantitatem oportet multiplicare, posse etiam inveniri, si loco incognitæ, in æquatione contentæ, substitutâ incognitâ aliâ, multiplicetur secundus terminus per ipsam datam quantitatem, per ejus quadratum terminus tertius, per cubum terminus quartus, atque ita deinceps.

Proponatur æquatio $x^3 - ax^2 + abx - a^2b = 0$, cujus radices oprteat multiplicare per c. Jam ponendo, juxta regulam traditam, $x = \frac{y}{c}$, & scribendo in æquatione pro x valorem istum, prodibit æquatio sequens $y^3 - acy^2 + abc^2y - a^2bc^3 = 0$, quæ etiam invenietur, si ponendo in æquatione propositâ y, & quadratum ejus y^2, cubumque y^3 loco x, x^2, & x^3, multiplicetur deinde secundus terminus per c, terminus tertius per c^2, & terminus quartus per c^3.

Proponatur æquatio numerica $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, & oporteat radices ejus multiplicare per 2. Fiat juxta

regulam traditam $x = \frac{z}{2}$, & substituendo in æquatione pro x ubique valorem istum, orietur sequens æquatio $z^3 - 18z^2 + 104z - 192 = 0$. Sed hæc eadem æquatio invenietur quoque, si ponatur in æquatione proposita z, z^2, & z^3 loco x, x^2, & x^3; ac deinde multiplicetur secundus terminus per 2, terminus tertius per 4, & terminus quartus per 8.

Hujus cõpendii ratio non meliùs intelligi potest, quàm si paulò diligentiùs perpendatur operatio, quæ fieri debet juxta regulam traditam. Ut enim radices, exempli gratia, istius æquationis $x^3 - ax^2 + abx - a^2b = 0$ multiplicentur per c, regula id quidem præscribit, ut ponatur $\frac{y}{c}$ loco x, $\frac{y^2}{c^2}$ loco x^2, & $\frac{y^3}{c^3}$ loco x^3. Unde quia hac factâ substitutione, producitur æquatio $\frac{y^3}{c^3} - \frac{ay^2}{c^2} + \frac{aby}{c} - a^2b = 0$. & in istâ oportet multiplicare terminos omnes per c^3, ut à fractionibus liberetur; perspicuum est perinde esse, si positis y, y^2,

y^2, & y^3 loco x, x^2, & x^3, multiplicetur terminus secundus per c, terminus tertius per c^2, & terminus quartus per c^3.

Ad dividendum autem radices alicujus æquationis per datam aliquam quantitatem, oportet vicissim in locum incognitæ quantitatis, in æquatione contentæ, aliam subrogare, quæ per datam illam quantitatem sit multiplicata. Ut si fuerit x incognita æquationis propositæ, & data quantitas sit a, assumenda est incognita alia y, & loco x ponendum ubique ay. Nec etiam dubium esse potest, quin hac factâ substitutione, unaquæque radix divisa reperiatur per a. Nam quum ex hypothesi sit $x = ay$, erit $\frac{x}{a} = y$.

Oporteat, exempli gratia, radices hujus æquationis $x^2 - acx - abx - a^2bc = 0$, quæ sunt ab, ac, dividere per quantitatem cognitam a. Ponatur $x = ay$, & in ipsâ æquatione scribatur ay loco x, & a^2y^2 loco x^2. Hac enim factâ substitutione, orietur hæc alia æquatio $a^2y^2 - a^2cy - a^2by + a^2bc = 0$, quæ fiet $y^2 - cy - by + bc = 0$, siquidem omnes ejus termini dividantur per a^2. Unde quia ra-

dices alterius hujus æquationis $y^2 - cy - by + bc = 0$ sunt a, & b; liquet, radices æquationis propositæ in hac alterâ divisas esse per a.

Oporteat similiter radices alterius hujus æquationis $x^2 - 20x + 96 = 0$, quæ sunt 8, & 12, dividere per numerum 4. Ponatur $x = 4z$, & in ipsâ æquatione scribatur $4z$ loco x, & $16z^2$ loco x^2. Hac siquidem peractâ substitutione, prodibit hæc altera æquatio $16z^2 - 80z + 96 = 0$, quæ evadet $z^2 - 5z + 6 = 0$, si utique omnes termini ejus dividantur per 16. Unde, quum radices alterius hujus æquationis $z^2 - 5z + 6 = 0$ sint 2, & 3; perspicuum est, radices propositæ æquationis in hac alterâ divisas esse per numerum 4.

Atque hìc quoque notatu dignum existimo, quod ea, in quam mutatur æquatio proposita, quum radices ipsius per datam aliquam quantitatem oportet dividere, possit etiam inveniri, si loco incognitæ, in æquatione contentæ, substitutâ incognitâ aliâ, dividatur secundus terminus per ipsam datam quantitatem, per ejus quadratum terminus tertius, per cubum terminus quartus, atque ita deinceps.

Pro-

Proponatur æquatio $x^3 - acx^2 + abc^2x - a^2bc^3 = 0$, cujus radices oporteat dividere per c. Jam ponendo, juxta regulam traditam, $x = cy$, & scribendo in æquatione pro x valorem istum ubique, prodibit æquatio sequens $y^3 - ay^2 + aby - a^2b = 0$: quæ etiam invenietur, si ponendo in æquatione propositâ y, & quadratum ejus y^2, cubumque y^3 loco x, x^2, & x^3, dividatur deinde secundus terminus per c, terminus tertius per c^2, & terminus quartus per c^3.

Proponatur æquatio numerica $x^3 - 18x^2 + 104x - 192 = 0$, & oporteat radices ejus dividere per 2. Fiat juxta regulam traditam $x = 2z$, & substituendo in æquatione pro x ubique valorem istum, orietur sequens æquatio $z^3 - 9z^2 + 26z - 24 = 0$. Sed hæc eadem æquatio invenietur quoque, si ponatur in æquatione propositâ z, z^2, & z^3 loco x, x^2, & x^3; ac deinde dividatur secundus terminus per 2, terminus tertius per 4, & terminus quartus per 8.

Atque hujus itidem compendii ratio non meliùs intelligi potest, quàm perpendendo paulò diligentiùs operationem, quæ fieri debet juxta regulam traditam. Ut enim radices, exempli gratia, istius

æquationis $x^3 - ax^2 + abx - a^2b = 0$ dividantur per c, regula id quidem præscribit, ut ponatur cy loco x, c^2y^2 loco x^2, & c^3y^3 loco x^3. Unde quia hac factâ substitutione, oritur æquatio $c^3y^3 - ac^2y^2 + abc^2 - a^2b = 0$, & in istâ oportet dividere terminos omnes per c^3, ut maxima incognitæ potestas à cognitis separetur; perspicuum est perinde esse, si positis y, y^2, & y^3 loco x, x^2, & x^3, dividatur terminus secundus per c, terminus tertius per c^2, & terminus quartus per c^3.

V.

Usus expositarum transformationum indicantur.

TRansformationes æquationum, quæ fiunt multiplicatione, & divisione, hoc est, multiplicando, & dividendo radices ipsarum per datam aliquam quantitatem, usui nobis esse possunt ad tollendas fractiones, & quandoq; etiā radicales quantitates ab ipsis æquationibus. Ut si habeatur æquatio $x^3 - 2x^2 + 10x - \frac{11}{8} = 0$, & ipsius loco alia desideretur,

cu-

cujus omnes termini per numeros integros exprimantur, obtinebitur id, si æquationis radices omnes multiplicentur per numerum 2, qui est radix cubica denominatoris fractionis. Nam quum substitutâ loco x incognitâ alterâ y, oporteat juxta ea, quæ superiùs ostensa sunt, secundum terminum multipiicare per 2, terminum tertium per 4, & quartum, sive ultimum terminum per 8; perspicuum est, hac ratione oriri æquationem alteram, quæ libera erit ab omni fractione.

Similiter, si habeatur æquatio $x^3 - 3x^2 + \frac{8}{9}x - 10 = 0$, & tollenda sit ex eâ fractio, quæ reperitur in tertio termino, satis erit omnes æquationis radices multiplicare per numerum 3, qui est radix quadrata denominatoris illius fractionis. Quum enim ad faciendam hanc multiplicationẽ necesse sit priùs substituere loco x incognitam aliam y, tum deinde secundum terminum multiplicare per 3, terminum tertium per 9, & quartum, sive ultimum terminum per 27; liquet in in hunc modum aliam oriri æquationem, in qua nulla fractio reperietur. Atque ita qua-

quoque si tollenda sit fractio, quæ existit in secundo termino hujus æquationis

$x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 4x - 2 = 0$, satis erit æquationis radices omnes multiplicare per numerum 3, qui est denominator illius fractionis.

Neque aliter fit, si non una, sed plures fractiones occurrant in æquatione. Proponatur, exempli gratia, æquatio $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{35}{64} = 0$, & oporteat eam in aliam transmutare, cujus termini nullas fractiones involvant. Quoniam denominator fractionis in ultimo termino est 64, ad tollendum eum oportet, radices æquationis multiplicare per numerum 4, qui est radix cubica numeri 64. Et similiter, quia denominator fractionis termini tertii est 9, tolletur ille, si radices æquationis multiplicentur per numerum 3, qui est radix quadrata numeri 9. Atque ita quoque evanescet fractio secundi termini, si eædem æquationis radices multiplicentur per numerum 2, qui est denominator illius fractionis. Unde si æquationis radices multiplicentur ab ini-

initio per numerum 24, qui oritur ex multiplicatione trium numerorum 2, 3, & 4; invenietur ſtatim æquatio, in qua nulla fractio reperiatur.

Non diſſimilis eſt operandi ratio, ſi quantitates radicales ex æquationibus tolli debeant. Ut ſi habeatur æquatio $x^2 + 3x\sqrt{2} - 6 = 0$, & ipſius loco alia deſideretur, cujus omnes termini per numeros rationales exprimantur; obtinebitur, ſi radices æquationis multiplicentur, aut dividantur per $\sqrt{2}$. Nam quum ſubſtitutâ in æquatione loco x incognitâ aliâ y, oporteat ſecundum terminum multiplicare, aut dividere per $\sqrt{2}$, & terminum tertium multiplicare, aut dividere per 2 quadratum ex $\sqrt{2}$; perſpicuum eſt utrâque ratione æquationem alteram oriri, quæ libera erit ab omni quantitate radicali. Atque ita quoque multiplicando, aut dividendo radices omnes hujus æquationis $x^3 - 2x^2\sqrt{3} - 15x + 9\sqrt{3} = 0$ per $\sqrt{3}$, alia loco ejus orietur, in qua nulla occurret quantitas radicalis.

Et quidem hac operatione facile ſemper erit, fractiones ex æquationibus tollere, quum non aliud requiratur, quàm ut denominator ejus fractionis ſit quadratum, ſi exiſtat in tertio termino; ſit cu-

cubus, si existat in quarto; sit quadrato-quadratum, si existat in quinto; atque ita deinceps: id, quod facile erit efficere, non mutato valore fractionis, siquidem aliter esse contigerit. Sed radicales quantitates non semper tollere licet, quum non rarò occurrat, ut id nullâ ratione possit obtineri. Ut si proponatur æquatio $x^3 - 3x^2 - 4x + 6\sqrt{3} = 0$, ex qua tollenda sit quantitas radicalis, oporteret radices æquationis multiplicare, aut dividere per $\sqrt{3}$: quod quidem quum efficitur, nova oritur æquatio, in qua eadem quantitas radicalis secundum terminum ingreditur.

Ope earundem transformationum fieri quoque potest, ut quantitas cognita alicujus termini in æquatione oriatur æqualis alteri cuidam datæ quantitati. Ut si habeatur æquatio $x^3 - 3x^2 + 18x - 54 = 0$, & ipsius loco invenienda sit alia, in qua quantitas cognita secundi termini, nimirum ea, quæ hìc est 3, fit 2, non autem 3; id quidem fieri potest, vel multiplicando radices æquationis per $\frac{2}{3}$, vel, quod idem est, dividendo eas per

Nam

$\frac{3}{2}$. Nam ponendo ubique y pro x, prodibit utroque casu hæc altera æquatio $y^3 - 2y^2 + 8y - 16 = 0$, in qua, ut vides, coefficiens, sive quantitas cognita secundi termini est datus numerus 2.

Similiter, si habeatur æquatio $x^3 - 12x^2 + 9x + 27 = 0$, & loco ejus alia quæratur, in qua quantitas cognita termini tertii non sit 9, sed 4; quia radix quadrata numeri 9 est 3, & radix quadrata numeri 4 est 2, satis erit, radices æquationis multiplicare per $\frac{2}{3}$, vel quod eodem recidit, eas dividere per $\frac{3}{2}$: sic enim substituendo y loco x, orietur æquatio $y^3 - 8y^2 + 4y + 8 = 0$, in qua coefficiens, sive quantitas cognita termini tertii est 4. Atque ita quoque si loco hujus æquationis $x^3 - 4x^2 + 8x - 8 = 0$ alia desideretur, cujus ultimus terminus non sit 8, sed 1; obtinebitur, si radices æquationis dividantur per 2, quum ponendo y loco x oriatur hæc altera $y^3 - 2y^2 + 2y - 1 = 0$.

Sed hoc idem obtineri quoque potest ope

ope earum transformationum, quæ fiunt additione, vel subtractione, hoc est augendo, vel minuendo radices æquationis datâ aliquâ quantitate. Semper enim inveniri poterit quantitas talis, ut si eâ augeantur, vel minuantur radices æquationis, quantitas nota unius ex terminis ejus prodeat æqualis alteri cuidam datæ quantitati. Invenietur autem hæc quantitas eâdem omnino methodo, qua determinatur quantitas, qua augendæ sunt, aut minuendæ radices æquationis, quò unus ex terminis ejus evanescat: nimirum si quantitas illa sumatur indeterminatè, & ope ejus transformetur æquatio proposita. Nam siquidem in eâ, quæ oritur illius loco, ponatur quantitas cognita termini assignati æqualis datæ quantitati, habebitur æquatio, quæ quantitatem illam determinabit.

Proponatur, exempli gratia, æquatio $x^2 - 2x + 4 = 0$, & oporteat eam in aliam transmutare, in qua quantitas cognita secundi termini sit $+ 4$, & non $- 2$. Ponatur $x = y + m$, & scribatur in ipsâ æquatione $y + m$ loco x, & $y^2 + 2my + m^2$ loco x^2. Habebitur ergo vice illius hæc altera æquatio $y^2 + 2my - 2y + m^2 - 2m + 4 = 0$. Et quoniam in istâ æqua-tio-

tione quantitas cognita secundi termini est $2m - 2$, ponatur ea æqualis 4. Erit itaque $2m - 2 = 4$, hoc est $2m = 6$: unde infertur $m = 3$. Si ergo fiat $x = y + 3$, & in æquatione propositâ scribatur $y + 3$ loco x, & $y^2 + 6y + 9$ loco x^2, habebitur loco ejus hæc alia $y^2 + 4y + 7 = 0$, in qua quantitas cognita secundi termini est $+ 4$, omnino ut quærebatur.

Quod si opus sit eandem æquationem $x^2 - 2x + 4 = 0$ mutare in aliam, cujus ultimus terminus sit $+ 7$, & non $+ 4$; tunc ponatur ultimus terminus ejus, quæ orta est ex ipsius transfomatione, hoc est $m^2 - 2m + 4$ æqualis 7. Sic enim habebitur $m^2 - 2m + 4 = 7$, hoc est $m^2 - 2m = 3$. Unde si utrique parti hujus æquationis addatur unitas, hoc est quadratum ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ, & utrinque extrahatur quadrata radix, fiet tum $m - 1 = 2$, tum $m - 1 = - 2$, hoc est tum $m = 3$, tum $m = - 1$. Ex quo patet, æquationem propositam mutari in aliam, cujus ultimus terminus sit $+ 7$; si in eâ loco x ponatur vel $y + 3$, vel $y - 1$.

Denique ope illius transformationis, quæ fit divisione, hoc est dividendo radices æquationis per datam aliquam quan-

quantitatem, hoc etiam potest obtineri, quod in examinandis æquationibus valde conducit, ut minuantur quantitates cognitæ, quæ in æquationis terminis singulis occurrunt. Ut si habeatur æquatio $x^3 - 9x^2 + 18x - 54 = 0$, dividendo radices ejus per 3, orietur hæc alia $y^3 - 3y^2 + 2y - 2 = 0$, quæ paulò simplicior est, si consideres quantitates cognitas terminorum. Sed quando demum id fieri possit absque eo, quod in fractiones incidatur, supervacaneum erit adnotare; quum nemo, opinor, sit, qui illud non satis percipiat, si sedulò attendat ad ea omnia, quæ hactenus dicta sunt de naturâ, & usu istarum transformationum.

VI.

Alii æquationes transformandi modi in medium afferuntur.

PRæter istos, quos modò attulimus, æquationes transformandi modos, sunt & alii quamplures, qui etsi non ita familiares sint Algebristis, quemadmodum priores quatuor, ignorari tamen non debent, quia quandoque possunt nobis usui esse. Itaque transformari ulterius

teriùs possunt æquationes, mutando eas in alias, quarum radices sint quotientes, qui oriuntur, dividendo datam quantitatem per radices illarum. Ut si habeatur æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$, cujus radices sunt 2, & 3; poterit ea mutari in aliam, cujus radices sint 6, & 4, hoc est quotientes, qui oriuntur, dividendo eundem numerum 12 per 2, & 3 radices illius.

Fiet autem hujusmodi transformatio, si ponatur $\frac{12}{x} = y$, vel quod eodẽ recidit $\frac{12}{y} = x$, & scribatur in ipsâ æquatione $\frac{12}{y}$ loco x, & $\frac{144}{y^2}$ loco x^2. Hac enim factâ substitutione, mutabitur æquatio proposita $x^2 - 5x + 6 = 0$ in hanc aliam $\frac{144}{y^2} - \frac{60}{y} + 6 = 0$, quæ legitimè reducta, ac præparata evadet $y^2 - 10y + 24 = 0$. Unde, quia in hac æquatione uterque numerorum 6, & 4 adimplet conditiones incognitæ y, faciendo, ut æquationis termini omnes contrarietate signorum se mutuò destruant; erunt 6, & 4 radices

illius æquationis ; & propterea illa, in quam æquatio proposita mutanda erat, erit $y^2 - 10y + 24 = 0$.

Ope hujus transformationis perspicuum est, radices æquationis in alias abire, quæ reciprocam ipsarum servant rationem ; adeoque maximam converti in minimam, & vicissim minimam in maximam. Sed si radices alicujus æquationis in earum inversas mutari debeant, sumenda erit unitas pro quantitate illâ, quæ dividi debet per unamquamque ex radicibus æquationis. Voco enim quantitates inversas, quæ designatæ ad instar fractionum, sibi ex contrariâ parte correspondent: quo sensu diximus alibi seriem harmonicam ex inversione numerorum naturalium oriri.

Ejusdem transformationis ope potest etiam penultimus terminus tolli, si modò priùs tollatur secundus. Sed ne in novâ æquatione fractiones occurrant, præstat pro quantitate illâ, quæ dividi debet per unamquamque ex radicibus propositæ æquationis, ultimum ipsius æquationis terminum ponere. Itaque si ex istâ æquatione $x^3 - 6x^2 + 4x + 10 = 0$ tolli debeat penultimus terminus, aufero primùm ex eâ terminum secundum, ut lo-

eo ejus habeatur hæc alia $z^3 - 8z + 2 = 0$; tum iſtam muto in alteram, cujus radices ſint quotientes, qui oriuntur, dividendo numerum 2 per radices illius; ſicque nova orietur æquatio $y^3 - 8y^2 + 4 = 0$, in qua, ut vides, penultimus terminus deficit. Sed ſi antepenultimum tollere cupias, id obtinebis, ſi modò tertium priùs tollas.

Huic æquationes transformandi modo non diſſimilis eſt ille, quem innuimus in fine articuli ſecundi, & per quem æquatio data mutatur in aliam, cujus radices ſint reſidua, quæ oriuntur, ſubtrahendo ex datâ quantitate radices illius. Quod enim in uno fit diviſione, in altero ſubtractione peragitur; & quantum ad radices poſitivas, ſi eæ non ſint majores datâ quantitate, adhuc minima convertitur in maximam, & maxima in minimam. Ita ſi fuerit æquatio $x^2 - 3x + 2 = 0$, & in eâ ponatur $5 - y$ loco x, & $25 - 10y + y^2$ loco x^2, orietur hæc altera $y^2 - 7y + 12 = 0$. Et profectò, quemadmodum radices illius ſunt 1, & 2; ita radices iſtius ſunt $5 - 1$, & $5 - 2$, hoc eſt 4, & 3.

Hic modus transformandi æquationes, ut vidimus loco citato, uſui nobis eſſe

poteſt ad tollendum ex iis ſecundũ terminum, quotieſcumque afficitur ſigno —. Sed idem poteſt etiam adhiberi, quum omnes æquationis radices requiruntur poſitivæ: nimirum ſi capiatur maximus coefficiens negativus, qui in æquatione reperitur, iſq; poſitivus, ac ſaltem unitate auctus ſtatuatur pro quantitate, ex qua radices æquationis ſunt ſubtrahendæ. Ut ſi fuerit æquatio $x^3 - 2x^2 - 4x + 6 = 0$, quia in eâ maximus coefficiens negativus eſt 4, fiat $x = 5 - y$, & debitâ ſubſtitutione peractâ, orietur æquatio $y^3 - 13y^2 + 51y - 49 = 0$, cujus radices omnes ſunt poſitivæ, quum termini ejus habeant alternatim ſigna +, & —.

Quod ſi æquationis radices omnes requirantur poſitivæ, ſed una ſimul coefficiens alicujus termini major ſit oporteat datâ aliquâ quantitate; tunc quæ ſit quantitas, ex qua ſubtrahendæ ſunt radices æquationis, determinari poterit per analyſim in hunc modum. Sit $x^2 - 3x - 6 = 0$ æquatio propoſita, & oporteat eam in aliam mutare, in qua non modò utraque radix ſit poſitiva, verùm etiam quantitas cognita ſecundi termini, prout quantitas eſt, ſit major numero 10.

Ponatur $m - y = x$, & ſcribatur in

in ipsâ æquatione $m - y$ loco x, & $m^2 - 2my + y^2$ loco x^2. Mutabitur ergo, hac factâ substitutione, æquatio proposita in hanc aliam $y^2 - 2my + 4y + m^2 - 4m - 6 = 0$, in qua quum secundus terminus affici debeat signo $-$, erit $2m$ major, quàm 4; adeoque ipsius quantitas cognita erit $2m - 4$. Hæc autem major esse debet numero 10. Itaque $2m$ major quoque erit, quàm 14, adeoque m major quàm 7: proindeque si loco m ponatur quilibet numerus, qui sit major, quàm 7, fiet quantitas cognita secundi termini major, quàm 10; atque eodem numero fiet etiam æquationis utraque radix positiva, quum maximus coefficiens negativus in æquatione contentus sit 6.

Sed si æquatio proposita sit $x^2 - 4x - 9 = 0$; tunc poterit quidem quilibet numerus, qui sit major, quàm 7, adhiberi ad inveniendam æquationem aliam, in qua quantitas cognita secundi termini sit major, quàm 10; sed ut æquationis utraque radix fiat positiva, necesse est, ut idem numerus sit major, quàm 9, quum maximus coefficiens negativus in æquatione contentus sit numerus 9. Quod si æquationis radices omnes requirantur

positivæ, sed coefficiens, sive quantitas cognita unius ex terminis ejus nō major, sed æqualis esse debeat alicui datæ quantitati; eo casu problema non semper solutionem admittet; sed tunc tantum, quum quaantitas, cui æqualis oritur indeterminata m, est major maximo coefficiente negativo.

Ejusdem analysis ope determinari poterit quantitas illa, ex qua subtrahendæ sunt radices æquationis, ut mutetur in aliam, in qua radices omnes sint positivæ, & una simul coefficiens termini tertii major sit quadrato, quod fit ex coefficiente secundi termini dimidiato. Esto enim $x^3 + 6x^2 - 15x - 4 = 0$ æquatio proposita. Ergo si ponatur $x = 2m - y$, & debita fiat substitutio, mutabitur illa in hanc aliam $y^3 - 6my^2 - 6y^2 + 12m^2y + 24my - 15y - 8m^3 - 24m^2 + 30m + 4 = 0$.

Et quoniam in istâ æquatione tertius terminus affici debet signo $+$, erit $12m^2 + 24m$ major quàm 15: proindeque ejus quantitas cognita erit $12m^2 + 24m - 15$. Hæc autem major esse debet quadrato, quod fit ex $3m + 3$, semisse quantitatis cognitæ secundi termini, hoc est $9m^2 + 18m + 9$. Itaque erit $12m^2 + 24m$ major, quàm

quàm $9m^2 + 18m + 24$ atque adeo quum fit $3m^2 + 6m$ major, quàm 24; erit $m^2 + 2m$ major, quàm 8; $m^2 + 2m + 1$ major, quàm 9; $m + 1$ major, quàm 3; m major, quàm 2; & $2m$ major, quàm 4. Mutabitur ergo æquatio proposita in aliam, in qua coefficiens termini tertii sit major quadrato, quod fit ex coefficiente secundi termini dimidiato, si loco $2m$ ponatur quilibet numerus, qui sit major, quàm 4; sed ejusdem radices omnes fient positivæ, si idem numerus sit major, quàm 15, qui est maximus coefficiens negativus æquationis.

Sed ille quoque æquationes transformandi modus, qui fit subrogando incognitam aliam in locum quadrati, cubi, aut cujuslibet alterius potestatis incognitæ, in æquatione contentæ, etsi alibi à nobis fuerit indicatus, non abs re tamen fuerit, si hîc denuò referatur. Itaque si fuerit æquatio $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$, ponatur $x^2 = y$, & debitâ substitutione peractâ habebitur loco ejus hæc alia $y^2 - 5y + 6 = 0$. Pariterque si habeatur æquatio $x^9 - 2x^6 + 4x^3 - 6 = 0$, fiat $x^3 = y$, & positis y, y^2, & y^3 loco x^3, x^6, & x^9, prodibit æquatio sequens $y^3 - 2y^2 + 4y - 6 = 0$. Sed quum hac ratione trans-

 for-

formantur æquationes, mutantur in alias, quarum radices habent rationem duplicatam, triplicatam, &c. ad radices illarum.

Viciſſim autem transformari poſſunt æquationes, mutando eas in alias, quarum radices habeant rationem ſubduplicatam, ſubtriplicatam, &c. ad radices illarum. Quod quidem efficitur, ſi loco incognitæ, in æquatione contentæ, ponatur quadratum, cubus, &c. alterius cujuslibet incognitæ. Ita ſi habeatur æquatio $x^2 - 2x - 3 = 0$, ponendo y^2 loco x, & y^4 loco x^2, habebitur hæc alia $y^4 - 2y^2 - 3 = 0$, cujus radices ad radices illius erunt in ratione ſubduplicatâ. Et ſi in eadem æquatione $x^2 - 2x - 3 = 0$ ponatur y^3 loco x, & y^6 loco x^2, orietur hæc altera $y^6 - 2y^3 - 3 = 0$, cujus radices ad radices illius habebunt rationem ſubtriplicatam.

CAP. V.

De reductione æquationum ad propriam ſedem.

Vidimus ſuperiùs, æquationem omnem, quæ ſit plurium dimenſionum

num, tot radices habere, quot sunt dimensiones ejus, eandemque constitui posse per multiplicationem mutuam æquationum simplicium, quæ illas continent radices. Sed notavimus quoque, æquationem illam, cujus radices sunt incommensurabiles, posse etiam constitui per unicam tantùm æquationum simplicium, quæ radices illas comprehendunt, modò sedes incommẽsurabilitatis in eodem illo gradu reperiatur, ad quem ascendit in æquatione quantitas incognita.

Ut si fuerit æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$, ejus radices duæ sunt 2, & 3. Et si ponatur $x = 2$, sive $x - 2 = 0$, & $x = 3$, sive $x - 3 = 0$, multipliceturque $x - 2 = 0$ per $x - 3 = 0$, prodibit æquatio ipsa $x^2 - 5x + 6 = 0$. Sed si habeatur æquatio $x^2 - 4x - 6 = 0$, quia istius radices sunt $2 + \sqrt{10}$, & $2 - \sqrt{10}$, constitui potest ea, non modò multiplicando $x - 2 - \sqrt{10} = 0$ per $x - 2 + \sqrt{10} = 0$, verùm etiam tollendo ab unaquaque istarum æquationum simplicium quantitatem radicalem.

Jam æquationem, quæ sit plurium dimensionum, tunc in propriâ suâ sede existere dicemus, quotiescumque constitui potest, non modò per multiplicationem mu-

mutuam æquationum simplicium, quæ continent radices ejus, verùm etiam per unicam tantùm illarum æquationum. Sed si talis habeatur æquatio, ut constitui nequaquam possit per unicam tantùm æquationum simplicium, quæ radices ipsius comprehendunt; tunc illam in propriâ suâ sede nequaquam existere dicemus.

Tripliciter autem contingere potest, ut æquatio plurium dimensionum in propriâ suâ sede nequaquam existat. Primò si omnes ejus radices sint commensurabiles, ac rationales. Secundò si partim sint rationales, partim radicales. Et denique si omnes sint radicales, sed sedes incommensurabilitatis nequaquam reperiatur in illo gradu, ad quem attollitur in æquatione quantitas incognita. Nam in quolibet istorum casuum nequit æquatio constitui per unicam tantùm æquationum simplicium, quæ continent radices ejus.

Unde etiam æquationes, quæ in propriâ suâ sede nequaquam existunt, tripliciter componi possunt. Omnibus enim id accidit, ut non aliter constitui queant, quàm per multiplicationem mutuam aliarum inferioris gradus æquationum.

Sed

Sed æquationum componentium, vel unaquæque simplex esse potest, vel nulla gaudet hac simplicitate, vel denique ex iis aliquæ simplices esse possunt, aliquæ non item.

Simplicem autem nunc voco æquationem, in qua incognita non modò est unius dimensionis, sed valorem quoque habet rationalem. Ex quo patet, æquationis compositæ radices omnes esse rationales, quum æquationum componentium unaquæque simplex esse potest; esse radicales, quum nulla ex æquationibus componentibus hac gaudet simplicitate; & esse demum partim rationales, partim radicales, quum æquationum componentium aliquæ possunt esse simplices, aliquæ non item.

Neque verò omnes cujuscumque gradus æquationes, quæ in propriâ suâ sede non existunt, possunt omnibus iis modis componi. Nam primò æquationes secundi gradus non aliter componi queunt, quàm mutuâ duarum æquationum simplicium multiplicatione. Et secundò æquationes tertii gradus constitui possunt, vel per multiplicationem mutuam triũ æquationum simplicium, vel etiam multiplicando æquationem secundi gradus,

quæ

quæ existat in propriâ suâ sede, per æquationem alteram simplicem.

Quantum ad alias altioris gradus æquationes, in iis quidem omnes tres illi componendi modi possunt occurrere. Æquatio namque quarti gradus, quæ non existat in propriâ suâ sede, oriri potest, vel ex multiplicatione quatuor æquationum simplicium; vel multiplicando æquationem secundi gradus, quæ sit in propriâ suâ sede, per alias duas æquationes simplices; vel multiplicando æquationem tertii gradus, in propriâ suâ sede existentem, per unicam tantùm æquationem simplicem; vel denique multiplicando per se mutuò duas secundi gradus æquationes, quarum utraque in propriâ suâ sede reperiatur.

Æquatio, quæ in propriâ suâ sede non existit, dicitur ad sedem suam propriam reduci, quum resolvitur in suas æquationes componentes. Hanc ergo æquationum reductionem tradituri, primò casum considerabimus, quum inter æquationes componentes reperitur aliqua simplex; tum alium expendemus, quum nulla æquationum componentium hac gaudet simplicitate. Sed ad eruendas æquationes simplices, si quæ sunt, ex æquatio-

tio-

tionibus compositis, explicanda priùs est ratio, qua terminorum cujuscumque æquationis coefficientes, sive quatitates cognitæ constituuntur.

I.

Qua ratione coefficientes terminorum cujuscumque æquationis constituantur, aperitur.

QUuemadmodum æquationes pluriū dimensionum constituuntur per multiplicationem continuam æquationum simplicium, quæ radices continent illarum; ita quantitates cognitæ terminorum cujuscumque æquationis constituuntur per varias, ac diversas rationes, quibus multiplicari possunt per se mutuò radices, quas in æquatione illâ habet incognita.

Si enim sub propriis suis signis capiantur seorsim radices æquationis, erit earum aggregatum sub signo contrario quantitas cognita secundi termini; quod si capiantur producta ex singulis binis, erit eorum aggregatum sub signo proprio quantitas cognita termini tertii; sed si sumantur producta ex singulis ternis, erit illo-

illorum aggregatum sub signo mutato quantitas cognita termini quarti; & si porrò accipiantur producta ex singulis quaternis, dabit eorum summa sub proprio signo quantitatem cognitam termini quinti; atque ita deinceps.

Id ex ipsâ æquationum generatione fit manifestum. Assumamus etenim simplices istas æquationes $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, & $x = -5$; vel quod perinde est $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 4 = 0$, & $x + 5 = 0$. Jam multiplicando $x - 2 = 0$ per $x - 3 = 0$, producetur æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$, cujus radices duæ sunt 2, & 3. Et profectò in hac æquatione clarè liquet, quod quantitas cognita secundi termini -5 constituatur, capiendo summam radicum 2, & 3 sub signo contrario; quantitas verò cognita termini tertii $+6$, capiendo sub proprio signo id, quod ex earundem radicum multiplicatione producitur.

Quod si æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$ multiplicetur per $x - 4 = 0$, producetur hæc altera $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, cujus ternæ radices sunt 2, 3, & 4. Atque hìc quoque liquidò patet; quantitatem cognitam secundi termini -9 constitui, capiendo summam radicum 2, 3 & 4 sub signo

ſigno contrario ; quantitatem cognitam termini tertii + 26, capiendo ſummam productorum ex ſingulis binis ſub ſigno proprio; & quantitatem cognitam termini quarti, capiendo id, quod ex radicum omnium multiplicatione producitur, ſub ſigno mutato.

Sed ſi æquatio $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ multiplicetur porrò per $x + 5 = 0$, tunc orietur hæc alia $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$, cujus radices quatuor ſunt 2, 3, 4, & -5. Ubi etiam manifeſtum eſt, quantitatem cognitam ſecundi termini -4 eſſe ſummam radicum, ſub ſigno contrario ; quantitatem cognitam termini tertii -19 eſſe ſummam productorum ex ſingulis binis, ſub ſigno proprio ; quantitatem cognitam termini quarti + 106 eſſe ſummam productorum ex ſingulis ternis, ſub ſigno mutato; & quantitatem cognitam termini quinti -120 eſſe productum, quod oritur ex multiplicatione radicum omnium, ſub ſigno proprio.

Hoc idem clariùs patebit, ſi radices æquationum litteris alphabeticis deſignemus, quum hac ratione quantitates, quæ oriuntur ſub ſignis contrariis, non ſe mutuò tollant, ſed maneant in ipſis æqua-

quationibus. Itaque si multiplicetur $x - a = 0$ per $x - b = 0$, orietur æquatio $x^2 - ax - bx + ab = 0$, cujus radices duæ sunt a, & b. Sed evidens est in hac æquatione quantitatem cognitam secundi termini $- a - b$ esse summã radicum a, & b sub signo mutato; quantitatem verò cognitam tertii termini $+ ab$ esse id, quod producitur ex multiplicatione earundem radicum, sub signo proprio.

Quod si æquatio $x^2 - ax - bx + ab = 0$ multiplicetur per $x + c = 0$, orietur hæc alia $x^3 - ax^2 - bx^2 + cx^2 - acx - bcx + abx + abc = 0$, cujus radices sunt a, b, & $- c$. Atque hìc quòque perspicuum est, quantitatem cognitam secundi termini $- a - b + c$ esse summam radicum sub signo mutato; quantitatem cognitam termini tertii $- ac - bc + ab$ esse summam productorum ex singulis binis sub signo proprio; & quantitatem cognitam termini quarti $+ abc$ esse id, quod ex multiplicatione radicum omnium generatur, sub signo contrario.

Jam, quum in secundo termino cujuscumque æquationis existat summa radicum sub signo mutato, perspicuum est, quod quotiescumque ex aliquâ æquatione

ne

ne deficit ſecundus terminus, tunc ſumma radicum poſitivarum æqualis ſit ſummæ ex radicibus negativis. Neque enim aliter abire poteſt ex æquatione terminus ſecundus, niſi evaneſcat quantitas cognita ejus: quæ quidem evaneſcet, ſi partes, ex quibus componitur, contrarietate ſignorum ſe mutuò deſtruant. Ita in poſtremâ æquatione $x^3 - ax^2 - bx^2 + cx^2 - acx - bcx + abx + abc = 0$ evaneſcet ſecundus terminus, ſi fuerit $a + b = c$, hoc eſt, ſi radices duæ poſitivæ ſimul æquales fuerint radici negativæ.

Inter eos, qui Elementa Algebræ ſcripſerunt, conati ſunt nonnulli problemata æquationum conſtitutiva, ex quorum nempe reſolutione æquationes illæ orirētur, determinare. Sano equidem conſilio, ne crederent Tyrones, æquationes ad libitum ſumptas fictitias eſſe, & ad nullum problema poſſe referri. Sed quorſum per ambages id, quod unicâ, & ſimpliciſſimâ viâ, quæ ex ipsâ æquationis, terminorumque ejus conſtitutione derivatur, tradi poteſt. Satis enim erat ſic rem concipere, ut pro unaquaque æquatione invenienda ſint tot quantitates, quot ſunt dimenſiones ejus, ſed ita tamen, ut data ſit tum ſumma ipſarum,

rum summa productorum ex singulis binis, summa productorum ex singulis ternis, &c.

Ut si fuerit æquatio $x^2 - ax + b^2 = 0$, problema ejus constitutivum hoc erit; invenire duas magnitudines, quarum summa sit a, productum verò sub ipsis sit b^2. Et similiter, si habeatur æquatio $x^3 - ax^2 - abx + abc = 0$, problema ejus constitutivum in hunc modum concipi poterit; invenire tres magnitudines, ita ut summa ipsarum sit a, summa productorum ex singulis binis sit $-ab$, & id, quod ex multiplicatione omnium producitur, sit $-abc$. Atque ita quoque, si proponatur æquatio $x^4 + ax^3 - abx^2 - abcx + abcd = 0$, poterit problema ejus constitutivum hoc pacto concipi; invenire quatuor magnitudines, ita ut summa ipsarum sit $-a$, summa productorum ex singulis binis sit $-ab$, summa productorum ex singulis ternis sit $+abc$, & id, quod oritur ex multiplicatione omnium, sit $abcd$.

Neque aliter concipi debent problemata constitutiva æquationum, in quibus unus, vel plures ex terminis intermediis desunt. Ut si fuerit æquatio $x^3 - abx + a^2b = 0$, problema constitutivum hoc erit;

erit: invenire tres magnitudines, ita ut ſumma ipſarum ſit zero, ſumma productorum ex ſingulis binis ſit $-ab$, omnium verò productum ſit $-a^2b$. Pariterque ſi habeatur æquatio $x^4 - abx^2 - a^2b^2 = 0$, problema conſtitutivum tale erit: invenire quatuor magnitudines, ita ut tam ſumma ipſarum, quàm ſumma productorum ex ſingulis ternis ſit zero, ſed ut ſumma productorum ex ſingulis binis ſit $-ab$, & productum ex omnibus ſit $-a^2b^2$.

Itaque in omni æquatione, etſi radices ejus adhuc nos lateant, ſumma tamen ipſarum, ſumma productorum ex ſingulis binis, ſumma productorum ex ſingulis ternis, &c. nequaquam nos fugiunt, quum deſignentur per ipſas quantitates cognitas terminorum æquationis ſub ſignis mutatis in terminis paribus, & ſub ſignis propriis in reliquis terminis. Sed quæ ſit ſumma quadratorum, cuborum, aliarumque altioris ordinis poteſtatum, quæ fiunt ex iiſdem radicibus, facili quoque negotio cognoſci poteſt. Ponamus enim quantitates cognitas terminorum æquationis ſub ſignis mutatis eſſe p, q, r, $ſ$, &c., hoc eſt p quantitatem cognitam ſecundi termini, q tertii, r quarti, $ſ$ quin-

ti &c. Et signis terminorum probè observatis, fiat $p = a$, $pa + 2q = b$, $pb + qa + 3r = c$, $pc + qb + ra + 4s = d$, & sic in infinitum. Qua ratione erit a summa radicum, b summa quadratorum, c summa cuborum, d summa quadrato-quadratorum, atque ita de reliquis.

Ità si fuerit æquatio $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$, quia quantitas cognita in secundo termino est -4, in tertio est -19, in quarto est $+106$, & in quinto est -120; ponendum erit $p = 4$, $q = 19$, $r = -106$, & $s = 120$. Et inde orietur $a = p = 4$, $b = pa + 2q = 54$, $c = pb + qa + 3r = -26$, & $d = pc + qb + ra + 4s = 978$. Quare summa radicum erit 4, summa quadratorum 54, summa cuborum -26, & summa quadrato-quadratorũ 978. Quod quidem perspicuum est. Sunt enim radices illius æquationis numeri 2, 3, 4, & -5. Et profectò summa horum numerorum $2 + 3 + 4 - 5$ est 4, summa quadratorum $4 + 9 + 16 + 25$ est 54, summa cuborum $8 + 27 + 64 - 125$ est -26, & summa quadrato-quadratorum $16 + 81 + 256 + 625$ est 978.

Rationem hujus regulæ facile intelligent, qui tum compositionem potestatum, cùm

cùm constitutionem quantitatum cognitarum, quæ in singulis terminis æquationum reperiuntur, perspectam habeant, ac exploratam. Tantùm notabimus eandem regulā valere quoque, etiam si quantitates p, q, r, s &c. non omnes in æquatione reperiantur: nimirum si quantitatum deficientium, velut æqualium nihilo, nulla ratio habeatur. Ita si fuerit æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$, erit $p = 5$, $q = -6$, & omnes aliæ quantitates erunt æquales nihilo. Unde, quum sit $a = p = 5$, $b = pa + 2q = 13$, $c = pb + qa + 3r = 35$, & $d = pc + qb + ra + 4s = 97$; erit 5 summa radicum, 13 sūma quadratorum, 35 summa cuborum, & 97 summa quadrato-quadratorum. Quod rursus perspicuum est. Sunt enim radices propositæ æquationis numeri 2, & 3. Et profectò quemadmodum summa illorum numerorum $2 + 3$ est 5; ita summa quadratorum $4 + 9$ erit 13, summa cuborum $8 + 27$ erit 35, & summa quadrato-quadratorum $16 + 81$ erit 97.

II.

De reductione æquationum compositarum, in quibus aliquæ ex componentibus sunt simplices.

OStenso, qua ratione constituantur quantitates cognitæ, quæ in æquationum terminis reperiuntur; haud difficile modò erit, æquationes illas cõpositas ad propriam sedem revocare, in quibus aliquæ ex æquationibus componentibus sunt simplices. Hunc in finem consideremus oportet, quod quum inter æquationes componentes una, aut plures sunt simplices, æquatio ipsa composita, necessariò unam, aut plures habere debeat radices rationales. Unde reducetur illa ad propriam sedem, si inventis radicibus illis rationalibus, formentur ex iis tot simplices æquationes, quot sunt ipsæ radices. Nam quum istæ sint illæ eædem, ex quibus æquatio componitur, poterit semper per eas æquatio dividi, atque ita ad propriam suam sedem revocari.

Eò itaque res redit, ut qua ratione ex aliqua æquatione radices rationales, si quæ sint, erui possint, ostendamus. Et quo-

quoniam ex iis, quæ articulo antecedenti dicta sunt, liquidò patet quantitatem cognitam, quæ in ultimo termino cujuscumque æquationis reperitur; esse id, quod ex continuâ radicum omnium multiplicatione producitur; si utique contingat, quantitatem aliquam rationalem esse radicem illius æquationis, sive positivam, sive negativam, ea dividet exactè, & absque ullo residuo quantitatem cognitam, quæ in ultimo termino æquationis continetur. Unde vicissim ad eruendas radices rationales, si quæ sint, ex aliquâ æquatione, satis erit, quantitatis congitæ in ultimo termino existentis divisores omnes invenire, & inquirere, quinam ex iis, substituti in æquatione loco incognitæ, ejus conditiones adimpleant, faciendo, ut æquationis termini omnes contrarietate signorum evanescant.

In hoc autem scrutinio peragendo substituendi sunt divisores loco incognitæ, non modò signo +, verùm etiam signo —; nam fieri potest, ut qui divisor non sit radix positiva alicujus æquationis, idem sit radix negativa. Interim si termini æquationis habeant alternatim signa +, & —; tunc satis erit, divisores

illos substituere signo +, quia propter signorum alternationem certum est, nullam in æquatione radicem negativam contineri, sed omnes esse positivas. Quemadmodum etiam satis erit illos subrogare signo —, si omnes termini æquationis eodem signo afficiantur, quia propter hanc signorum similitudinem certum est, in æquatione nullam radicem positivam contineri, sed omnes esse negativas.

Itaque proponatur æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$, & oporteat redices rationales, si quas habet, invenire. Inveniantur divisores omnes numeri 6, qui est quantitas cognita ultimi termini, iique erunt quatuor, & non plures, nimirum 1, 2, 3, & 6. Et quoniam termini æquationis propositæ habent alternatim signa +, & —, substituendi sunt divisores isti loco incognitæ x dumtaxat signo +. Itaque quia si loco x ponatur 1, æquationis termini omnes non evanescunt, quum fiant $1 - 5 + 6$, tento divisorem alterum 2, & quia substitutione istius, termini evanescunt, quum evadant $4 - 10 + 6$; erit jam 2 æquationis radix una. Quumque evanescant quoque termini, si loco x ponatur divisor tertius 3, erit 3 radix altera.

ra. Itaque radices duæ æquationis sunt 2, & 3; atque adeò æquatio ipsa componitur per multiplicationem æquationum simplicium $x - 2 = 0$, & $x - 3 = 0$.

Proponatur æquatio $x^2 + 3x - 10 = 0$, & inveniendæ sint radices ejus rationales, si quas habet. Inveniantur divisores omnes numeri 10, qui est quantitas cognita ultimi termini, iique erunt 1, 2, 5, & 10. Et quoniam æquatio proposita unam habet radicem positivam, alteram negativam, substituendi sunt divisores illi, tum signo $+$, cùm signo $-$. Itaque quia nec 1, nec -1 adimplet conditiones incognitæ, tento divisorem alterum 2; & quoniam quum hic substituitur signo $+$, æquationis termini omnes evanescunt, erit 2 radix positiva æquationis. Quumque hoc idem præstet divisor tertius 5, substitutus signo $-$, erit -5 radix altera. Quare radices duæ æquationis erunt 2, & -5; & propterea æquatio ipsa componetur ex multiplicatione æquationum simplicium $x - 2 = 0$, & $x + 5 = 0$.

Proponatur ulteriùs æquatio $x^3 - 8x^2 + 16x - 8 = 0$, & oporteat radices, si quas habet, rationales invenire. Capiantur divisores numeri 8, qui est quantitas co-

cognita ultimi termini, iique erunt 1, 2, 4, & 8. Et quoniam æquatio habet alternatim signa +, & —, substituendi erunt divisores illi tantùm signo +. Itaque quia substituendo divisorem primum 1 loco incognitæ x, fiunt termini æquationis $1 - 8 + 16 - 8$, qui nequaquam evanescunt, substituo divisorem alterum 2; & quia per hujus substitutionem adimplentur conditiones incognitæ, erit 2 radix una æquationis. Cumque nec 4, nec 8 efficiat æquationis terminos omnes evanescere; concludendum est, æquationem propositam unam tantùm habere radicem rationalem, nimirum 2; atque adeo ad ejus compositionem unam dumtaxat æquationem simplicem concurrere, nempe $x - 2 = 0$.

Neque aliter operabitur, si æquatio fuerit litteralis. Proponatur æquatio $x^2 - ax - bx + ab = 0$, cujus ambæ radices sunt positivæ. Capiantur divisores quantitatis cognitæ ab, quæ existit in ultimo termino, iique erunt 1, a, b, & ab. Et quoniam radices aquationis sunt positivæ, substituendi sunt divisores illi dumtaxat signo +. Itaque quia conditiones incognitæ x adimplentur tam per quantitatem a, quàm per quantitatem b,

quum

quum utraque si loco x in æquatione substituatur, efficiat, æquationis terminos omnes evanescere, erunt a, & b radices propositæ æquationis; adeoque æquatio ipsa componetur ex multiplicatione æquationum simplicium $x - a = 0$, & $x - b = 0$.

Similiter, si æquatio fuerit $x^3 - abx - a^2x + a^2b = 0$, capiantur divisores quantitatis cognitæ in ultimo termino existentis a^2b, iique erunt 1, a, b, a^2, ab, & a^2b. Et quoniam æquatio, si signa terminorum consideres, duas debet habere radices positivas, & unam negativam; substituendi sunt divisores illi, tum signo $+$, cùm signo $-$. Verùm quia dumtaxat divisor secundus a, quum substituitur signo $+$, adimplet conditiones incognitæ x, efficiendo, ut æquationis termini omnes contrarietate signorum se mutuò destruant, nec ullus alius hoc idem præstare potest quocumque signo substituatur; consequens est, ut æquatio proposita unam tantùm habeat radicem rationalem, nimirum a; atque adeo ad ejus compositionem unicam quoq; æquationem simplicem concurrere, videlicet $x - a = 0$.

Jam quum omnes æquationes componen-

nentes fuerint ſimplices, ſive primi gradus, tunc propria ſedes æquationis compoſitæ erit ipſe gradus primus; quum radices omnes incognitæ in gradu illo conſiſtant, utpote rationales. Sed ſi non omnes æquationes componentes ſimplices fuerint, tunc æquatio compoſita nequaquam dicenda eſt ſimplex, ſed dijudicanda ſedes ejus ex æquatione, quæ oritur in quotiente, dividendo æquationem compoſitam per ſingulas æquationes ſimplices inventas. Ita quia dividendo æquationem $x^3 - abx - a^2x + a^2b = 0$ per æquationem ſimplicem $x - a = 0$, quæ ſola ad ejus conſtitutionem concurrit, oritur in quotiente æquatio ſecundi gradus $x^2 + ax - ab = 0$; ſedes propria illius æquationis in ſecundo gradu eſſe dicetur.

Sed notetur hìc velim, æquationem compoſitam tunc demum habere propriam ſuam ſedem in gradu illo, cujus deprehenditur æquatio, quæ oritur in quotiente, dividendo æquationem ipſam compoſitam per ſingulas æquationes ſimplices componentes, quum ſedes illius æquationis in tali fuerit gradu. Nam ſi æquatio illa oriatur, exempli gratia, quatuor dimenſionum, tametſi ex æquationibus ſim-

ſimplicibus componi ulterius nequeat, fieri tamen poteſt, ut componatur ex multiplicatione duarum æquationum, quarum unaquæque ſit ſecundi gradus. Quod profectò quum accidit, nequaquam dicenda eſt æquatio illa quarti gradus, nec proinde dici poteſt æquationem ipſam compoſitam in quarto gradu ſuam ſedem habere.

Cæterùm ſi contingat, quantitatem cognitam ultimi termini plures diviſores hebere, tunc methodus eruendi radices rationales, per ſubſtitutionem omnium illorum diviſorum, nonnihil moleſtiæ afferet Analyſtis. Hunc in finē præſtat primò minuere terminos æquationis, ſi fieri poteſt, ope illius transformationis, quæ diviſione peragitur; quum ſic minuatur etiam numerus diviſorum. Secundò invenire limites, intra quos continentur radices tum poſitivæ, cum negativæ, ope earum transformationum, quæ fiunt additione, & ſubtractione; quum diviſores, qui eos limites tranſgrediuntur, tutò negligi poſſint. Tertiò reijcere etiam diviſores, qui quantitatem cognitam ſecundi termini excedunt, quotieſcumque radices æquationis, vel omnes ſunt poſitivæ, vel omnes negativæ. Et denique

in

in æquationibus litteralibus negligere quoque divisores duarum, aut plurium dimensionum, quum termini omnes sunt homogenei, & æquatio nequit transformari, ponendo incognitam aliam loco quadrati, cubi, aut alterius potestatis incognitæ, in æquatione contentæ.

Limites autem, intra quos continentur radices, tum positivæ, cùm negativæ, inveniri quoque possunt, si priùs inveniantur summæ qradratorum, quadrato-quadratorum, cubo-cuborum,&c. ex singulis radicibus. Nam quum radicum omnium quadrata sint positiva, erit item positiva summa quadratorum, ideoque quadrato maximæ radicis major. Et eodem argumento summa quadrato-quadratorum radicum omnium major erit, quàm quadrato-quadratum radicis maximæ; & summa cubo-cuborũ major, quàm cubo-cubus radicis maximæ. Quamobrẽ si limitem desideres, quem radices nullæ transgrediuntur, quære summam quadratorum ex radicibus omnibus, & extrahe ejus radicem quadratam, quæ quum sit major, quàm maxima radix æquationis, limitem dabit optatum. Sed ad radicem maximam propiùs accedes, si quæras summam quadrato-quadratorum,

& ex-

& extrahas ejus radicem quadrato-quadratam; & adhuc magis, si quæras summam cubo-cuborum, & extrahas ejus radicem cubo-cubicam; atque ita in infinitum.

III.

Methodus inveniendi omnes alicujus quantitatis divisores, ostenditur.

TRaditam methodum eruendi radices rationales ex æquationibus, ope divisorum quantitatis cognitæ, quæ existit in ultimo termino, duplici potissimùm ratione non omnibus probatam video; primò quia non ita facile est, omnes alicujus quantitatis divisores invenire; & secundò, quia quum permulti sunt divisores, omnes tentare, tædium affert. Jam inveniendo limitem, quem radices nullæ transgrediuntur, haud quidem necesse est divisores omnes tentare, sed sufficiet eorum periculum facere, qui limitem illum non excedunt. Itaque ne ulla supersit difficultas, ostendenda modò est methodus, qua mediante omnes alicujus quantitatis divisores possint inveniri.

Et quidem, si quantitas fuerit numerica, invenientur omnes ejus divisores in hunc

hunc modum. Dividatur ea per minimum sui divisorem, & quotus per minimum adhuc sui divisorem, idque fiat, usque donec quotus oriatur indivisibilis. Hac enim ratione omnes quantitatis divisores primi habebuntur. Et siquidem horum divisorum capiantur producta ex singulis binis, ternis, quaternis, &c., habebuntur hoc pacto omnes divisores compositi.

Ita si numeri 60 divisores omnes desiderentur, dividatur primò eum per 2, ut quotus fiat 30; tum quotum istum 30 didatur rursus per 2, ut alius oriatur 15; porrò 15 dividatur per 3, & quia oritur quotus indivisibilis 5, erunt divisores primi 1, 2, 2, 3, 5. Sed qui ex istorum binis componuntur, sunt 4, 6, 10, 15; qui verò ex ternis sunt 12, 20, 30; quique demum ex omnibus est ipse numerus 60.

Similiter si quærantur divisores omnes numeri 100, dividatur primò ille per 2, ut fiat quotiens 50; tum quotiens iste 50 dividatur iterum per 2, ut alius oriatur 25; & quia diviso hoc alio quotiente 25 per 5 minimum ejus divisorem, oritur quotus indivisibilis 5; erunt divisores primi numeri propositi 1, 2, 2,

5, 5,

5, 5. Unde qui ex istorum binis componuntur, erunt 4, 10, 25; qui ex ternis, erunt 20, & 50; qui verò componitur ex omnibus, erit ipse datus numerus 100.

Hanc eandem methodum experiri quoque licet in quantitatibus litteralibus, quum vel simplices sunt, vel non adeò compositæ. Ita si quantitatis $21ab^2$ divisores omnes desiderentur, dividatur ea per 3, & quotus $7ab^2$ per 7, & quotus ab^2 per a, & quotus b^2 per b. Unde quum restet quotus indivisibilis b, erunt divisores primi quantitatis propositæ 1, 3, 7, a, b, b; sed qui ex istorum binis componuntur, sunt 21, $3a$, $3b$, $7a$, $7b$, ab, b^2; qui ex ternis, sunt $21a$, $21b$, $3ab$, $3b^2$, $7ab$, $7b^2$, ab^2; qui ex quaternis, sunt $21ab$, $21b^2$, $3ab^2$, $7ab^2$; qui verò ex quinis, est ipsa quantitas proposita $21ab^2$.

Eadem ratione, si quærantur divisores omnes quantitatis litteralis $2ab^2 - 6a^2c$; divido primò eam per 2; tum quotum $ab^2 - 3a^2c$ per a; quumque restet quotus indivisibilis $b^2 - 3ac$, erunt divisores primi quantitatis propositæ 1, 2, a, $b^2 - 3ac$. Unde qui ex binis istorum componuntur, erunt $2a$, $2b^2 - 6ac$, ab^2

$-3a^2c$; qui verò componitur ex ternis, erit ipsa quantitas proposita $2ab^2 - 6a^2c$. Et eodem modo divisores omnes quantitatis $a^2b - abc$ erunt, a, b, $a - c$, ab, $a^2 - ac$, $ab - cb$, $a^2b - abc$.

Sed si quantitas litteralis sit valde composita, ita ut divisâ per omnes suos simplices divisores, suspicio sit, eam posse divisorem aliquem compositum habere; tunc disponatur illa secundùm dimensiones unius ex litteris ejus, eademque ponatur æqualis zero, sive nihilo, ut fiat æquatio, in qua incognitæ munus subeat littera illa. Quum enim in istâ æquatione fictitiâ quantitas cognita ultimi termini non sit adeo composita, quemadmodum est summa totius æquationis, poterunt per regulam traditam divisores ejus omnes inveniri. Unde si contingat, ipsam æquationem dividi posse per binomium, constans litterâ, quæ subit vices incognitæ, plus, vel minus aliquo ex iis divisoribus; erit binomium illud divisor compositus propositæ quantitatis.

Esto, exempli gratiâ, $b^2d - da^2 + a^3 - b^2d$ quotus, qui remanet, divisâ datâ quantitate per omnes suos simplices divisores, & inquirendum sit, num quotus iste admittat divisorem aliquem compositum

tum. Disponatur quantitas illius quotiẽtis secundùm dimensiones litteræ a, & fiat $a^3 - da^2 + b^2a - b^2d = 0$. Inveniantur divisores omnes quantitatis b^2d, quæ existit in ultimo termino hujus æquationis, iique erunt $1, b, d, b^2, bd, b^2d$. Et quoniam æquatio dividi potest exactè, & absque ullo residuo per binomium $a - d$, ut patet, si loco a substituatur d, quum æquationis termini omnes evanescant; erit $a - d$ divisor compositus illius quotientis. Et quia factâ divisione, oritur quotus indivisibilis $a^2 + b^2$, hic erit ejusdem quotientis divisor alter compositus, nec præter hos duos alius quispiam poterit exhiberi.

Similiter si fuerit $11a^2 - 7a^3 - 30 + a^4 + 13a$ quotus, qui superest, dividendo datam quãtitatem per omnes suos simplices divisores, dispono partes ejus secundùm dimensiones litteræ a, & ex iis constituo æquationem $a^4 - 7a^3 + 11a^2 + 13a - 30 = 0$. Tum quia divisores numeri 30, qui reperitur in ultimo termino, sunt $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$, tento, num æquatio illa dividi possit per binomium, compositum ex litterâ a plus, vel minus aliquo ex iis divisoribus. Et quoniam reperio, dividi eam posse tum per

binomium $a - 2$, cùm per binomium $a - 3$, ut patet, si in æquatione loco litteræ a substituatur tum 2, cùm 3; erunt duo ista binomia divisores duo compositi illius quotientis. Quumque factâ utrâque divisione, relinquatur quotus indivisibilis $a^2 - 2a - 5$, habendus est quotus iste pro tertio divisore cōposito, nec præter hos tres alii poterunt exhiberi, nisi qui ex illorum binis, aut ternis componuntur.

Jam si dispositâ quantitate secundùm dimensiones cujuslibet ex litteris, in eâ contentis, numquam talis habeatur æquatio, ut dividi possit per aliquod binomium, compositum ex litterâ illâ plus, vel minus uno ex divisoribus ultimi termini; concludendum erit, quantitatem illam non admittere divisores compositos unius dimensionis. Sed si quantitas ipsa sit plurium, quàm trium dimensionum, poterit fortasse divisores admittere compositos plurium item dimensionum. Verùm divisores istos invenire, inutile erit, quia in æquationibus litteralibus homogeneis, quæ deprimi non possunt substituendo in locum incognitæ potestatem quamvis alterius incognitæ, quales ut plurimum esse solent æquationes, ii tantùm divisores sunt eligendi, qui sunt unius

unius dimensionis.

Interim si desiderentur, in iis inveniendis non hærebit Analysta. Nam quemadmodum ad inveniendos divisores compositos unius dimensionis, satis erit disponere partes datæ quantitatis secundùm dimensiones unius ex litteris ejus, & formatâ ex iis æquatione, inquirere methodo jam traditâ, num ad constitutionem istius fictitiæ æquationis, aliæ concurrant æquationes simplices; ita ad inveniendos divisores compositos duarum, aut plurium dimensionum, ordinatâ rursus quantitate secundùm dimensiones unius ex litteris in eâ contentis, & institutâ æquatione ex partibus ejus, satis erit methodo mox tradendâ investigare, num æquatio illa fictitia in duas alias gradus inferioris deprimi queat.

Sed nolim hìc reticere, quod aliquando divisores isti compositi faciliùs, quàm per has regulas, possint investigari. Ut si littera aliqua in quantitate propositâ sit unius tantùm dimensionis; quærendus erit maximus communis divisor terminorum, in quibus littera illa reperitur, & relquorum terminorum, in quibus illa non reperitur. Hujusmodi namque divisor communis dividet quoque totam

quantitatem; & si nullus erit talis divisor communis, nullus item erit divisor totius. Ita si fuerit quantitas $x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x - cx^3 + acx^2 - 8a^2cx + 6a^3c - 8a^4$, quæratur communis divisor terminorum $- cx^3 + acx^2 - 8a^2cx + 6a^3c$, in quibus c est unius tantùm dimensionis, & terminorum reliquorum $x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x - 8a^4$, ac divisor ille, qui erit $x^2 + 2ax - 2a^2$, dividet totam quantitatem.

IV.

De reductione æquationum compositarum quarti gradus, in quibus nulla ex componentibus est simplex.

Postquam innotuerit, ope divisorum, æquationem secundi, aut tertii gradus nullam habere radicem rationalem, nec ad ejus constitutionem æquationem ullam simplicem concurrere; concludendum est, propriam sedem propositæ æquationis in gradu illo subsistere, nec proinde ad gradum inferiorem absque eo, quod in radicales incidatur, deprimi posse. Sed hoc idem de æquationibus quarti, aut ulterioris gradus nequit asseverari: enim verò

verò tametsi ad earum constitutionem nulla æquatio simplex interveniat, adhuc tamen fieri potest, ut ad gradum inferiorem deprimi queant, nimirùm si ex duabus, aut pluribus æquationibus componantur, quæ tametsi non sint simplices, inferioris tamen gradus deprehendantur.

Itaque in reductione æquationum quarti, aut ulterioris gradus ad propriam sedem, hunc alium oportet casum contemplemur. Et ut ab æquationibus quarti gradus ordiamur, perspicuum est, quod quum istæ in proprià sede non consistunt, nec tamen ad earum constitutionem ulla concurrit æquatio simplex, non aliter componi queant, quàm per multiplicationem duarum æquationum, quarum unaquæque sit secundi gradus. Sed circa duas istas æquationes componentes tria contingere possunt. Primum, ut utraque secundo termino careat. Alterum, ut una careat secundo termino, alia illum admittat. Et tertium, sive postremum, ut tam una, quàm altera secundo termino gaudeat.

Quantum ad primum, nempe quum æquationum componentium utraque secũdo termino caret, ponamus æquationes illas esse $x^2 + a = 0$, & $x^2 + b = 0$. Itaque

que si duæ istæ æquationes mutiplicentur inter se, prodibit æquatio tertia $x^4 + ax^2 + bx^2 + ab = 0$, quæ secundo, & quarto termino caret. Unde discimus, tunc quidem æquationes quarti gradus componi posse ex multiplicatione duarum æquationum secundi gradus, quarum unaquæque secundo termino careat, quum in iis, non modò secundus, verùm etiam quartus terminus deficit. Sed quando demum id fieri queat, & qua ratione datâ æquatione compositâ possint æquationes duæ componentes determinari, haud difficile erit inquirere.

Nimirum, quia in æquatione compositâ $x^4 + ax^2 + bx^2 + ab = 0$, si fiat quadratum ex $a + b$, quantitate cognitâ tertii termini, eique mutato signo addatur quadruplum ultimi termini omninò noti, oritur quantitas $a^2 - 2ab + b^2$, quæ est quadratum perfectum; dividetur æquatio quarti gradus, quæ secundo, & quarto termino caret, in alias duas secundi gradus, si quadratum ex quantitate cognitâ termini tertii, adsciscens quater terminum ultimum sub signo mutato, maneat adhuc quadratum. Quumque radix quantitatis $a^2 - 2ab + b^2$ sit $a - b$, quæ addita cum $a + b$ dat $2a$, ex illâ verò

rò subducta relinquit $2b$; invenientur quantitates cognitæ æquationum componentium, si capiantur semisses summæ, & differentiæ, quæ oriuntur addendo, & subtrahendo quantitati cognitæ termini tertii radicem illius novi quadrati.

Ita si fuerit æquatio $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$, quia quadratum ex quantitate cognitâ tertii termini est 25, addendo ei quater quantitatem cognitam ultimi termini sub signo mutato, habebitur 1 quadratum perfectum. Unde quia radix hujus quadrati, quæ est similiter 1, addita ad -5 dat -4, exinde verò subtracta relinquit -6, & semissis summæ est -2, semissis verò differentiæ est -3; erunt æquationes componentes $x^2 - 2 = 0$, & $x^2 - 3 = 0$. Atque ita quoque si habeatur æquatio $x^4 + 3x^2 - 40 = 0$, quia quadratum ex quantitate cognitâ termini tertii est 9, addendo ei quater quantitatem cognitam ultimi termini sub signo contrario, habetur 169 similiter quadratum perfectum. Quocirca quia radix hujus quadrati 13 addita ad $+3$ dat 16, exinde verò subducta relinquit -10, & semissis summæ est 8, semissis verò differentiæ est -5, erunt æquationes duæ componentes $x^2 + 8 = 0$, & $x^2 - 5 = 0$.

Quan-

Quantum ad ſecundum, nimirum quum æquationum componentium, una ſecundo termino caret, altera non item, ſit $x^2 + a = 0$ æquatio, quæ caret ſecundo termino, & $x^2 + bx + c = 0$ æquatio, quæ terminis omnibus eſt repleta. Itaque ſi multiplicentur inter ſe duæ iſtæ æquationes, prodibit æquatio tertia $x^4 + bx^3 + cx^2 + ax^2 + abx + ac = 0$, in qua tãtùm terminus tertius, utpote cõpoſitus, deficere poteſt. Et quoniam in iſtâ æquatione ſecundus, & quartus terminus ſimul, ſi ſub propriis ſignis ponantur æquales nihilo, reſtituunt nobis æquationem componentem, quæ ſecundo termino caret: proinde æquatio quarti gradus, quæ ſic componitur, reſolvetur in ſuas æquationes componentes, ſi dividatur per æquationem ſecundi gradus, quæ oritur, ponendo ſecundum, & quartum terminum ſimul ſub propriis ſignis æquales zero, ſive nihilo. Et ſiquidem hæc diviſio fieri nequit, tunc certum erit æquationem propoſitam, vel in propriâ ſuâ ſede reperiri, vel eo, qui ſupponitur, modo nequaquam compoſitam eſſe.

Hoc pacto ſi habeatur æquatio $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 6x + 12 = 0$, quia poſitis ſecundo, & quarto termino ſimul æqualibus

libus nihilo, fit $-2x^3 + 6x = 0$, hoc est $x^2 - 3 = 0$, & æquatio proposita dividitur exactè per æquationem istam $x^2 - 3 = 0$, quum oriatur in quotiente $x^2 - 2x - 4 = 0$; erunt æquationes duæ componentes $x^2 - 3 = 0$, & $x^2 - 2x - 4 = 0$. Atque ita quoque si habeatur æquatio $x^4 + ax^3 + a^2bx - a^2b^2 = 0$, quia ponendo $ax^3 + a^2bx = 0$, habetur æquatio secundi gradus $x^2 + ab = 0$, quæ dividit exactè, & absque ullo residuo æquationem propositam, quum det in quotiente $x^2 + ax - ab = 0$; erunt illius æquationes componentes $x^2 + ab = 0$, & $x^2 + ax - ab = 0$. Sed æquatio ista $x^4 + ax^3 - abx^2 + a^2cx - a^4 = 0$ vel est irreducibilis, vel nequaquam hoc modo componitur, quum dividi non possit per æquationem $x^2 + ac = 0$, quæ oritur, ponendo secundum, & quartum terminum sub propriis signis æquales zero, sive nihilo.

Quoniam autem divisio tædium afferre solet, evitabitur illa, si ex reliquis æquationis propositæ terminis instituta æquatione aliâ, inquiratur ope substitutionis, num in eâ valor incognitæ sit ille idem, qui eruitur ex priori æquatione. Si enim hoc contigerit, certum erit æqua-

quationem eo, qui supponitur, modum compositam esse; secus verò, si alium valorem habere reperiatur. Sic in æquatione $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$, quæ constituitur ex reliquis terminis æquationis $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 6x + 12 = 0$, quia ponendo 3 loco x^2, & 9 loco x^4, termini ejus fiunt $9 - 21 + 12$, qui contrarietate signorum se mutuò destruunt, erit in æquatione illâ revera $x^2 - 3 = 0$. Et similiter, quia in æquatione $x^4 - a^2b^2 = 0$, quæ formatur ex reliquis terminis æquationis $x^4 + ax^3 + a^2bx - a^2b^2 = 0$, x^2 habet eundem valorem, ac in æquatione istâ $x^2 + ab = 0$, consequens est, ut revera in æquatione illâ sit $x^2 + ab = 0$, atque adeo, ut per istam exactè dividi possit.

Quantùm ad tertium, videlicet, quum æquationum componentium utraque terminis omnibus est repleta, sit $x^2 + ax + c = 0$ æquatio una, & $x^2 + bx + d = 0$ æquatio altera. Itaque si duæ istæ æquationes multiplicentur inter se, prodibit æquatio tertia $x^4 + ax^3 + bx^3 + cx^2 + dx^2 + abx^2 + adx + bcx + cd = 0$. Et quoniam in istâ æquatione quantitates c, & d, componentes mutuâ multiplicatione ultimum terminum, si mutatis signis

ad-

addantur quantitati cognitæ tertii termini $c + d + ab$, fiet illa ab, cujus quadruplum si addatur sub signo mutato quadrato ex quantitate cognitâ secundi termini $a + b$, orietur $a^2 - 2ab + b^2$ similiter quadratum perfectum; discimus hinc æquationem quarti gradus componi eo modo, quem supponimus, si ultimus terminus tales admittat divisores, ut duo, qui simul multiplicati eum terminum producant, additi sub signis contrariis quantitati cognitæ tertii termini, dent talem aliam quantitatem, ut quadratum quantitatis cognitæ secundi termini, adsciscens quadruplum illius, sub signo mutato, maneat adhuc quadratum.

Jam si hoc contigerit, æquationes componentes determinabuntur in hunc modum. Quoniam quantitates c, & d, quæ mutuâ multiplicatione componunt ultimum terminum cd, sunt ultimi termini æquationum componentium; erunt divisores, qui effectum illum producunt, ultimi termini in æquationibus componentibus. Et quoniam radix novi illius quadrati $a^2 - 2ab + b^2$ est $a - b$, quæ addita ad $a + b$ dat $2a$, exinde verò subtracta relinquit $2b$, habebuntur quantitates cognitæ, repræsentatæ per a, & b in se-

secundis terminis æquationum componentium, si radix novi illius, quod producitur, quadrati, primò addatur, deinde subtrahatur quantitati cognitæ secundi termini, capianturque semisses summæ, & differentiæ. Denique quæ quantitates ponendæ sint in unâ æquatione, quæ verò in alterâ; id tentando poterit determinari.

Sed notetur hoc loco velim, quod tametsi certò concludi possit, æquationem propositam nequaquam componi eo modo, qui supponitur, quum nulli sunt divisores, qui eum producunt effectum; non hinc tamen vicissim adstruenda compositio illa, quum reperiuntur tales divisores, quia fieri adhuc potest, ut æquatio proposita illam compositionem non admittat. Neque id mirum videri debet. Nulla enim hactenus habita à nobis est ratio quantitatis cognitæ quarti termini: & profectò quum aliquid debet determinari, conditiones ejus omnes sunt evolvendæ. Itaque, num æquatio proposita sit composita, nec ne, constabit nobis, si rei periculum fiat, hoc est, si multiplicentur inter se æquationes inventæ.

Proponatur æquatio $x^4 + 5x^3 - 3x^2$ —

$- 22x + 20 = 0$. Jam ultimi termini divisores sunt 1, 2, 4, 5, 10, 20; adeoque qui mutuâ multiplicatione eum componere possunt, sunt vel 1, & 20; vel -1, & -20; vel 4, & 5; vel -4, & -5; vel 2, & 10; vel -2, & -10. Sed quoniam dumtaxat divisores duo -4, & -5 hujusmodi sunt, ut additi signis mutatis quantitati cognitæ tertii termini, producant effectum illum; proinde ii tantùm sunt eligendi. Itaque quia quantitas cognita tertii termini, eorum sub contrariis signis additione, fit $+6$, & quadratum ex quantitate cognitâ secundi termini est 25: erit 1 quadratum, quod oritur, addendo ad 25 quadruplum ipsius 6 sub signo mutato. Unde quum radix hujus quadrati, quæ similiter est 1, addita ad $+5$ det $+6$, exinde verò subtracta relinquat $+4$; erit $+3$ semissis summæ, & $+2$ semissis differentiæ: proindeque, si æquatio sit composita, æquationes componentes erunt, vel $x^2 + 3x - 4 = 0$, & $x^2 + 2x - 5 = 0$; vel $x^2 + 3x - 5 = 0$, & $x^2 + 2x - 4 = 0$.

Hæc eadem regula valet etiam, si aliquis ex terminis intermediis, cujus quantitas cognita ad calculum poni debet, desit

sit in æquatione; nimirum fingendo quantitatem cognitam illius termini esse zero, sive nihilum. Ita si æquatio fuerit $x^4 - 8x - 32 = 0$, quia divisores -4, $+8$, qui simul multiplicati componunt ultimum terminum -32, additi sub signis contrariis ad zero, quantitatem cognitam tertii termini, dant -4, cujus quadruplum si addatur sub signo mutato quantitati cognitæ secundi termini, quæ similiter est zero, fit 16 quadratum perfectum: proinde invenientur æquationes componentes, si utique æquatio proposita sit composita, extrahendo radicem quadratam ex 16, & ejus sub utroque signo semisses capiendo, quæ erunt $+2$, & -2. Sic enim æquationes componentes erunt vel $x^2 + 2x - 4 = 0$, & $x^2 - 2x + 8 = 0$; vel $x^2 + 2x + 8 = 0$, & $x^2 - 2x - 4 = 0$.

Cæterùm, quia divisores, qui producunt effectum illum, debent esse ultimi termini æquationum componentium; perspicuum est, quod si æquatio fuerit litteralis, omnesque ejus termini fuerint homogenei, ii tantùm divisores possint effectum illum præstare, qui similiter sunt homogenei, hoc est, qui sunt duarum dimensionum. Ita si fuerit æquatio

tio $x^4 - a^2x^2 + 2a^2bx - a^2b^2 = 0$, tametsi divisores ultimi termini sint 1, a, b, a^2, b^2, ab, a^2b, ab^2, & a^2b^2; attamen qui reductioni æquationis possunt inservire, sunt, vel $+ a^2$, & $- b^2$, vel $- a^2$, & $+ b^2$, vel $+ ab$, & $- ab$.

V.

Reductio æquationum compositarum quarti gradus alia methodo instituitur.

Regula mox tradita, pro reducendis æquationibus quarti gradus, quum ambæ æquationum componentium terminis omnibus sunt repletæ, etsi sit valde facilis, ac expedita, attamen ad æquationes altioris gradus nequaquam potest promoveri. Hunc in finem, pro reducendis hujusmodi æquationibus, aliam hìc placet methodum proponere, quæ generalis erit, & ad omnes cujuscumque gradus æquationes poterit applicari. Est autem summa hujus methodi hæc: nimirum assumantur æquationes duæ componentes indeterminatè, & quæ ex earum multiplicatione componitur, conferatur cum æquatione propositâ: nam factâ mutuâ terminorum collocatione, habebuntur

tur totidem aliæ æquationes, quarum ope facile erit, æquationes componentes determinare.

Hanc methodum experiamur primò in ipsis æquationibus quarti gradus. Itaq; si $x^2 + ax + c = 0$, & $x^2 + bx + d = 0$ referant æquationes componentes, erit æquatio composita $x^4 + ax^3 + bx^3 + cx^2 + dx^2 + abx^2 + adx + bcx + cd = 0$. Unde si æquatio proposita fuerit $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ (quam etiam indeterminatam assumimus, ut possit omnes quarti gradus æquationes repræsentare) conferendo terminos unius cum terminis alterius, habebuntur quatuor aliæ æquationes, nempe $p = a + b$, $q = c + d + ab$, $r = ad + bc$, & $s = cd$.

Et quoniam in primâ istarum æquationum habetur $p = a + b$, erit transponendo $p - a = b$, adeoque multiplicando terminos omnes per c, erit $pc - ac = bc$. Quare substituendo in tertiâ æquatione $r = ad + bc$ loco bc valorem suum $pc - ac$, habebitur $r = ad + pc - ac$; atque adeo multiplicatis rursus terminis omnibus per c, erit $rc = adc + pcc - acc$. Est autem in quartâ æquatione $cd = s$. Itaque erit $rc = as + pcc$

$- acc$: unde infertur $a = \frac{rc - pcc}{s - cc}$.

Quare cognito valore quantitatis c, cognoscetur etiam valor ipsius a, & consequenter determinabitur prior ex æquationibus componentibus $x^2 + ax + c = 0$: qua utique determinatâ, altera ope divisionis poterit definiri.

Jam quantitas c, quum dividat exactè ultimum terminum (est enim $cd = s$), poterit tentando inveniri: nimirum assumendo pro eâ successivè divisores omnes ultimi termini. Itaque reducentur hac methodo æquationes quarti gradus, si ex divisoribus ultimi termini talis possit inveniri, ut determinando secundùm eum æquationem $x^2 + ax + c = 0$, hæc talis evadat, ut dividat exactè, & absque ullo residuo æquationem propositam. Sed divisores tentandi sunt sub utroq; signo; & si æquatio proposita fuerit litteralis, omnesque ejus termini fuerint homogenei, ii tantùm sunt tentandi, qui sunt duarum dimensionum.

Proponatur, exempli gratiâ, reducenda æquatio $x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 18x + 6 = 0$. Jam divisores ultimi termini sub utroque signo sunt 1, 2, 3, 6, -1, -2,

$-3, -6$. Ponatur -2 pro c. Et quia in æquatione propositâ p est -7, r est $+18$, & s est $+6$, erit $a = \frac{rc - pcc}{s - cc} = \frac{-36 + 28}{6 - 4} = -4$: proindeque æquatio $x^2 + ax + c = 0$ fiet $x^2 - 4x - 2 = 0$. Et quoniam æquatio proposita $x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 18x + 6 = 0$ dividitur exactè, & absque ullo residuo per hanc aliam $x^2 - 4x - 2 = 0$, quum oriatur hæc altera in quotiente $x^2 - 3x - 3 = 0$; consequens est, ut proposita æquatio sit composita, & ut ejus æquationes componentes sint $x^2 - 4x - 2 = 0$, & $x^2 - 3x - 3 = 0$.

Proponatur similiter æquatio $x^4 - d^2x^2 + 2d^2bx - d^2b^2 = 0$. Et quoniam æquatio ista est litteralis, omnesque ejus termini sunt homogenei, capiendi sunt dumtaxat divisores ultimi termini, qui duas habent dimensiones, nempe d^2, b^2, db. Itaque, quia in æquatione propositâ p est zero, r est $+ 2d^2b$, & s est $- d^2b^2$, ponendo $-db$ pro c, fiet $a = \frac{rc - pc^2}{s - c^2} = \frac{-2d^3b^2}{-2d^2b^2} = d$; adeoque æquatio $x^2 + ax$

$+ ax + c = 0$ evadet $x^2 + dx - db = 0$. Unde quia æquatio proposita $x^4 - d^2x^2 + 2d^2bx - d^2b^2 = 0$ dividitur exactè per æquationem istam $x^2 + dx - db = 0$, quum oriatur in quotiente hæc altera $x^2 - dx + db = 0$, concludendum est, propositam æquationem compositam esse, ejusque æquationes componentes esse $x^2 + dx - db = 0$, & $x^2 - dx + db = 0$.

Sed proponatur ulteriùs æquatio $x^4 - 11x^3 + 38x^2 - 44x + 16 = 0$. Hæc si reducenda esset methodo superiùs tradita, invenietur pro æquationibus componentibus $x^2 - 6x + 4 = 0$, & $x^2 - 5x + 4 = 0$; quum 4, & 4 sint divisores, qui additi ad quantitatem cognitam tertii termini sub signis mutatis, dent talem aliam quantitatem, ut quadratum, quod fit ex quantitate cognitâ termini secundi, adsciscens quadruplum illius, sub signo contrario, maneat adhuc quadratum. Itaq; si eadem æquatio reducenda esset hac aliâ methodo, necesse foret pro c ponere 4. Jam verò quum p sit -11, r sit -44, & f sit $+16$, invenitur $a = \frac{rc - pc^2}{f - c^2}$

$\frac{-176+176}{16-16} = \frac{0}{0}$. Fallit ergo in hoc exemplo methodus, & quæ sit una ex æquationibus componentibus ope ejus nequaquam erui potest.

Quum primum id mihi sese obtulit, dicere vix possum, quantum animo conciderim. Veritatem namque methodi perspectam habebam, ac exploratam, nec poteram de illâ dubitare; æquationem autem propositam compositam esse, & in duas alias secundi gradus divisibilem, jam aliunde notum mihi erat. Itaque, cur falleret in illâ æquatione methodus, ex solidis principiis deducta, comprehendere sanè non poteram. Calculum denuò, atque iterum institui, ne in eo error subesset. Sed idem semper erat eventus, & quæ primò sese obtulit impossibilitas, eadem semper occurrebat. Interim, re pressiùs consideratâ, mysterii hujus rationem illicò novi.

Nimirum, quia æquationes componentes sunt $x^2 - 6x + 4 = 0$, & $x^2 - 5x + 4 = 0$, perspicuum est, eas in ultimo termino eandem quantitatem cognitam habere. Itaque, quum pro c assumitur 4, æquatio $x^2 + ax + c = 0$ ad

utram-

utramque æquationum componentium, ut ita dicam; inclinat; adeoque nulla ratio est, cur in unam potiùs, quàm in alteram debeat converti. Necesse est ergo, ut quum determinatur æquatio illa, in utramque simul degeneret; quod utique fieri non potest, nisi pro quantitate *a* duplex valor inveniatur. Hinc itaque fit, ut fallat methodus in exemplo proposito; quia nempe secundum methodum illam unicus tantum valor quantitatis *a* potest inveniri.

Sed crediderim, tantùm abesse, ut deficiat nobis methodus in hoc exemplo, ut potiùs rem nobis sub oculos ponat, & & quid in eâ latitet, fideliter nobis aperiat. Invenitur quippe pro quantitate *a* beneficio illius methodi quotiens, qui oritur, dividendo zero per zero, hoc est infinitesimam ultimi generis per aliam ejusdem generis infinitesimam. Sed nonne ex principiis supra positis, quum duæ ejusdem generis infinitesimæ per se mutuò dividuntur, quotiens, qui exinde oritur, est quantitas finita? Adumbrat itaque methodus valorem quantitatis *a*, verùm quia illum nobis exhibet indeterminatè, quid aliud exinde arguendum, nisi quod *a* multiplex esse debeat?

Jam, ut in hujus generis æquationibus reducendis methodus procedat, determinanda est quātitas a ope alterius c tali æquatione, ut duplex exinde valor colligi possit: id, quod factu facile erit. Quum enim habeatur $q = c + d + ab$, erit $d = q - c - ab$; atque adeo multiplicando terminos omnes per c, erit $cd = qc - cc - abc$. Sed habetur quoque $cd = f$. Itaque erit $qc - cc - abc = f$. Jam verò in æquatione $p = a + b$, transponendo, est $b = p - a$, & $abc = pac - aac$, si utique termini omnes multiplicentur per ac. Quare si in æquatione $qc - cc - abc = f$ loco abc ponatur valor inventus $pac - aac$, erit $qc - cc - pac + aac = f$, quæ ordinata juxta dimensiones litteræ a, fiet $a^2 - pa - c + q - \frac{f}{c} = 0$, ubi littera a, propter duas dimensiones, duplicem valorem admittit.

Videamus itaque modò, num determinando valorem ipsius a ope hujus æquationis, methodus procedat in reducendâ æquatione superiùs propositâ $x^4 - 11x^3 + 38x^2 - 44x + 16 = 0$: nimirum assumendo divisorem 4 pro c, & subrogando in æquatione illâ indeterminatâ loco $p, q,$

p, q, & f valores suos, mutabitur in hanc aliam $a^2 + 11a + 30 = 0$. Jam verò valores incognitæ a in istâ æquatione sunt -6, & -5; quum uterque istorum numerorum, substitutus in æquatione loco incognitæ a, efficiat æquationis terminos omnes evanescere. Itaque quum pro c, assumitur 4, a esse potest vel -6, vel -5. Unde inferuntur æquationes duæ componentes $x^2 - 6x + 4 = 0$, & $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Cæterùm hac eadem methodo determinari quoque possunt æquationes componentes, quotiescumque secundo termino carent. Multiplicetur etenim æquatio $x^2 - 3 = 0$ per hanc aliam $x^2 - 2x - 2 = 0$; jam producetur æquatio quarti gradus $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x + 6 = 0$. Assumatur -3 pro c, & factâ debitâ substitutione, invenietur $a = \frac{rc - pcc}{f - cc} = \frac{-18+18}{6-9} = \frac{0}{-3}$. Sed quum zero dividitur per quantitatem finitam, quotiens, qui inde oritur est etiam zero; quum ex principiis supra positis, multiplicando, vel dividendo infinitesimam aliquam per quantitatem finitam, producatur infinitesima ejusdem generis. Est

igi-

igitur valor ipſius a nullus, & ea propter æquatio $x^2 + ax + c = 0$ mutabitur in hanc aliam $x^2 - 3 = 0$, quæ eſt æquatio componens, ſecundo termino carens.

Interim, ſi multiplicetur $x^2 - 3 = 0$ per $x^2 - 2x - 3 = 0$, ut producatur æquatio quarti gradus $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 6x + 9 = 0$; tunc ad inveniendas æquationes componentes, neceſſe eſt, ut valorem ipſius a eruamus non quidem ex æquatione ſimplici $a = \frac{rc - pcc}{s - cc}$, ſed ex æquatione compoſitâ $a^2 - pa + q - c - \frac{s}{c} = 0$. Nam ponendo -3 pro c, æquatio quidem ſimplex dabit pro a valorem indeterminatum; hoc eſt quotientem, qui oritur, dividendo zero per zero; æquatio verò compoſita mutabitur in hanc aliam $a^2 + 2a = 0$, ubi valores incognitæ a ſunt zero, & -2, tales nimirum, quales eſſe debent quantitates cognitæ in ſecundis terminis æquationum componentium. Quod exinde etiam repeti debet, quia in æquationibus componentibus eadem eſt quantitas cognita ultimi termini.

Ea-

VI.

Eadem reducendi methodus ad æquationes compositas altioris gradus extenditur.

IN reducendis æquationibus compositis, quæ plures habent, quàm quatuor dimensiones, varii quoque casus essent distinguendi: sed quum particularia sub universalibus contineantur, satius erit, eum casum expendere, quando æquationes componentes terminis omnibus sunt repletæ. Itaque, si æquatio composita fuerit quinti gradus, nec ad ejus constitutionem ulla concurrat æquatio simplex, non aliter ea componi poterit, quàm per multiplicationem mutuam duarum æquationum, quarum una sit secundi gradus, altera tertii. Unde assumptis æquationibus illis indeterminatè, & aliâ per earum multiplicationem compositâ, conferendi sunt termini istius cum terminis æquationis propositæ, ut possint æquationes illæ componentes determinari.

Nimirum si $x^2 + ax + c = 0$, & $x^3 + bx^2 + dx + f = 0$ sint æquationes duæ componentes, indeterminatè sumptæ, mul-

multiplicando eas per se mutuò, erit æquatio composita $x^5 + ax^4 + bx^4 + cx^3 + dx^3 + abx^3 + fx^2 + bcx^2 + adx^2 + cdx + afx + cf = 0$. Unde si æquatio proposita sit $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$, quam itidem indeterminatam accipimus, ut possit omnes quinti gradus æquationes repræsentare, conferendo terminos unius cum terminis alterius, habebuntur quinque aliæ æquationes, nempe $p = a + b$, $q = c + d + ab$, $r = f + bc + ad$, $s = cd + af$, & $t = cf$.

Et quoniam in primâ istarum æquationum habetur $p = a + b$; erit transponendo $p - a = b$; atque adeo, multiplicando terminos omnes per a, erit $pa - aa = ba$. Unde si in secundâ æquatione $q = c + d + ab$ loco ab ponatur valor iste $pa - aa$, erit $q = c + d + pa - aa$; hoc est, transponendo, $q - c - pa + aa = d$, adeoque, multiplicando terminos omnes per c, erit $qc - cc - pac + aac = cd$. Jam verò quum in quartâ æquatione habeatur $s = cd + af$, erit $s - af = cd$. Quare erit etiam $qc - cc - pac + aac = s - af$; & consequenter, multiplicatis terminis omnibus per c, erit $qc^2 - c^3 - pac^2 + a^2c^2 = cs - acf$. Quumque in ultimâ æquatione habeatur $t =$

cf,

cf, erit tandem $qc^2 - c^3 - pac^2 + a^2c^2$

$= cf - \frac{at}{f}$, hoc est $a^2 - pa + \frac{ta}{c^3} - c + q - \frac{t}{c} = 0$.

Hinc cognito valore ipsius c, qui tentando potest inveniri, quum sit divisor exactus ultimi termini, facile erit, ope hujus æquationis, valorem quantitatis a invenire, ipsamq; adeo æquationem componentem $x^2 + ax + c = 0$ determinare. Hac autem determinatâ, dividatur per eam æquatio proposita. Et siquidem contingat, divisionem fieri posse exactè, & absque ullo residuo; certum erit, æquationem propositam esse revera compositam, & habebitur in quotiente æquatio altera tertii gradus. Quod si verò tentatis omnibus divisoribus, nequeat æquatio illa subinde determinari; ut per eam dividi possit æquatio proposita; concludendum est, propositam æquationem in propriâ suâ sede existere, nec proinde ad gradum inferiorem deprimi posse.

Proponatur, exempli gratiâ, æquatio $x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 11x^2 - 14x + 6 = 0$, in qua habetur $p = -2$, $q = -2$, $r = 11$, $s = -14$, & $t = 6$. Itaque si pro

si pro c ponatur 2, qui est unus ex divisoribus ultimi termini, invenietur $a = -2$: proindeque æquatio $x^2 + ax + c = 0$ fiet $x^2 - 2x + 2 = 0$. Et quoniam divisâ æquatione propositâ $x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 11x^2 - 14x + 6 = 0$ per æquationem istã secundi gradus $x^2 - 2x + 2 = 0$ divisio fit exactè, & absque ullo residuo, quum oriatur in quotiente æquatio tertii gradus $x^3 - 4x + 3 = 0$; concludendum est, æquationem propositam compositam esse, ejusque æquationes componentes esse $x^2 - 2x + 2 = 0$, & $x^3 - 4x + 3 = 0$.

Sed pro determinando valore quantitatis a, ope alterius c, potest alia æquatio inveniri: nimirum, quia in primâ illarum æquationum habetur $p = a + b$; erit rursus transponendo $p - a = b$, adeoque, multiplicando terminos omnes per c, erit $pc - ac = bc$. Unde si in tertiâ æquatione $r = f + bc + ad$, loco bc ponatur valor ille $pc - ac$, erit $r = f + pc - ac + ad$, hoc est $r - f - pc + ac = ad$, atque adeo $cr - cf - pc^2 + ac^2 = acd$. Sed in quartâ æquatione habetur $f = cd + af$, hoc est $f - af = cd$, sive etiam $af - a^2f = acd$. Itaque erit $cr - cf - pc^2 + ac^2 = af - a^2f$,

a^2f, & confequenter $c^2r - c^2f - pc^3 + ac^3 = acf - a^2cf$. Quumque in ultima æquatione habeatur $t = cf$, erit demum $c^2r - ct - pc^3 + ac^3 = acf - a^2t$, hoc eſt $a^2 + \frac{c^3a}{t} - \frac{cfa}{t} - \frac{pc^3}{t} + \frac{c^2r}{t} - c = 0$, quæ eſt æquatio altera duarum dimenſionum.

Quod ſi æquatio compoſita fuerit ſexti gradus, nec ad ejus conſtitutionem ulla concurrat æquatio ſimplex, poterit illa tripliciter componi, vel nimirum ex multiplicatione trium æquationum, quarum unaquæque ſit ſecundi gradus; vel ex multiplicatione duarum æquationum, quarum una ſit ſecundi gradus, altera quarti; vel denique ex multiplicatione duarum æquationum, quarum quælibet ſit tertii gradus. Sed ſatis erit duos iſtos poſtremos caſus expendere; nam ſemper ac æquatio componitur ex multiplicatione trium æquationum, quarum unaquæque ſit ſecundi gradus, componi quoque poterit ex multiplicatione duarum æquationum, quarum una ſit quarti gradus, altera ſecundi; quum duæ ex æquationibus componentibus multiplicatæ ſimul componant æquationem quarti gradus.

Po-

Ponamus itaque æquationem propositam sexti gradus compositam esse ex multiplicatione duarum æquationum, quarum una sit secundi gradus, altera quarti. Ergo si æquationes componentes fuerint $x^2 + ax + c = 0$, & $x^4 + bx^3 + dx^2 + fx + g = 0$, erit æquatio ex iis cōposita $x^6 + bx^5 + ax^5 + cx^4 + abx^4 + fx^3 + cbx^3 + adx^3 + gx^2 + afx^2 + cdx^2 + cfx + agx + cg = 0$. Sit autem æquatio proposita $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + u = 0$, quam indeterminatam semper accipimus, ut possit omnes ejus, de quo agitur, gradus æquationes repræsentare. Itaque conferendo terminos unius cum terminis alterius, habebuntur sex aliæ æquationes $p = a + b$, $q = c + d + ab$, $r = f + cb + ad$, $s = g + af + cd$, $t = cf + ag$, & $u = cg$.

Et quoniam in primâ istarum æquationum habetur $p = a + b$, erit $p - a = b$, atque adeo $pa - a^2 = ab$. Unde si in secundâ æquatione $q = c + d + ab$ loco ab ponatur valor ille, erit $q = c + d + pa - a^2$, hoc est $a^2 - pa - c + q = d$, adeoque $ca^2 - cpa - c^2 + qc = cd$. Jam verò, quum in quartâ æquatione habeatur $s = g + af + cd$, erit $s - g - af = cd$. Quare erit etiam $ca^2 - cpa - c^2 + qc$

$qc = f - g - af$, & consequenter $c^2a^2 - c^2pa - c^3 + qc^2 = cf - cg - acf$. Est autem in quintâ $t = cf + ag$, hoc est $t - ag = cf$. Itaque substituto in illâ loco cf valore isto, erit $c^2a^2 - c^2pa - c^3 + qc^2 = cf - cg - ta + ga^2$, atq; adeo $c^3a^2 - c^3pa - c^4 + qc^3 = c^2f - c^2g - cta + cga^2$. Quumque in ultimâ habeatur $u = cg$, erit tandem $c^3a^2 - c^3pa - c^4 + qc^3 = c^2f - cu - cta + ua^2$, ope cujus æquationis, cognito valore ipsius c, facile erit valorem alterius a invenire, atque adeo determinare æquationem componentem $x^2 + ax + c = 0$.

Sed pro determinando valore quantitatis a, cognito valore alterius c, potest etiam altera æquatio reperiri, in qua tamen ipsa quantitas a ad tres dimensiones ascendet. Nimirum, quia in primâ illarum æquationum habetur $p = a + b$, erit rursus $p - a = b$, adeoque $cp - ca = cb$. Unde si in tertiâ æquatione $r = f + cb + ad$ loco cb ponatur valor ille $cp - ca$, erit $r = f + cp - ca + ad$, atque adeo $cr - cf - c^2p + c^2a = acd$. Sed in quartâ habetur $f = g + af + cd$, hoc est $fa - ga - fa^2 = acd$. Itaque erit $cr - cf - c^2p + c^2a = fa - ga - fa^2$, &

consequēter $c^2r - c^2f - c^3p + c^3a = cfa - cga - cfa^2$. Est autem in quintâ $t = cf + ga$, hoc est $t - ga = cf$. Quare subrogando in illâ loco cf valore isto $t - ga$, erit $c^2r - ct + cga - c^3p + c^3a = cfa - cga - ta^2 + ga^3$, adeoq; $c^3r - c^2t + 2c^2ga - c^4p + c^4a = c^2fa - cta^2 + cga^3$. Et quoniam in ultimâ habetur $u = cg$, proinde substituendo ubique u loco cg, habebitur tandem $c^3r - c^2t + 2cua - c^4p + c^4a = c^2fa - cta^2 + ua^3$, in qua, ut vides, quantitas a ad tres dimensiones ascendit.

Ponamus secundò æquationem sexti gradus compositam esse ex multiplicatione mutuâ duarum æquationum, quarum quælibet sit tertii gradus. Itaque si æquationes componentes fuerint $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, & $x^3 + dx^2 + fx + g = 0$, erit æquatio ex iis composita, $x^6 + ax^5 + dx^5 + bx^4 + fx^4 + adx^4 + cx^3 + gx^3 + bdx^3 + afx^3 + cdx^2 + agx^2 + bfx^2 + cfx + bgx + cg = 0$. Quocirca si $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + fx^2 + tx + u = 0$ repræsentet propositam æquationem, conferendo terminos unius ordine cum terminis alterius, habebuntur sex aliæ æquationes, nempe $p = a + d$, $q = b + f + ad$, $r = c + g + bd + af$, $f = cd + ag + bf$, $t = cf + bg$, & $u = cg$; quarum ope, cognito

va-

valore quantitatis c, ita quidem determinari debet valor ipsius a, ut simul innotescat valor alterius b; quandoquidem æquatio indeterminata $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ determinari nequit, nisi definitis valoribus singularum quantitatum a, b, c.

Itaque, quia in primâ illarum æquationum habetur $p = a + d$, erit $p - a = d$, atque adeo $pa - a^2 = ad$. Unde, si in secundâ æquatione $q = b + f + ad$ loco ad ponatur valor ille $pa - a^2$, erit $q = b + f + pa - a^2$, hoc est $a^2 - pa - b + q = f$, atque adeo $ca^2 - cpa - cb + cq = cf$. Jam verò, quum in quintâ æquatione sit $t = cf + bg$, erit $t - bg = cf$. Quare erit $ca^2 - cpa - cb + cq = t - bg$, & consequenter $c^2a^2 - c^2pa - c^2b + c^2q = ct - bcg$. Est autem in ultimâ æquatione $u = cg$. Itaque substituendo in illâ u loco cg, erit $c^2a^2 - c^2pa - c^2b + c^2q = ct - bu$: unde infertur

$$b = \frac{c^2a^2 - c^2pa + c^2q - ct}{c^2 - u}$$

: qua mediante æquatione, cognitis valoribus quantitatum a, & c, cognoscetur item valor alterius b.

Sed ad determinandam quantitatem b, cognitis valoribus ipsarũ a, & c, alia rur-

sus æquatio potest inveniri : nimirum, quia in tertiâ illarum æquationum habetur $r = c + g + bd + af$, multiplicando terminos omnes per c, erit $cr = c^2 + cg + cbd + caf$. Est autem in ultimâ æquatione $cg = u$. Itaque ponendo in illâ u loco cg, erit $cr = c^2 + u + cbd + caf$. Jam verò in secundâ æquatione habetur $q = b + f + ad$, hoc est $q - b - ad = f$, sive etiam $caq - cba - ca^2d = acf$. Quare ponendo rursus in illâ loco acf valorem istum, erit $cr = c^2 + u + cbd + caq - cba - ca^2d$, in qua si demum ponatur loco d valor ejus $p - a$, qui eruitur ex primâ æquatione $p = a + d$, fiet $cr = c^2 + u + cbp - cba + caq - cba - pca^2 + ca^3$: ex qua æquatione infertur

$$b = \frac{ca^3 - pca^2 + caq + c^2 + u - cr}{2ca - cp}.$$

Habemus itaque duas æquationes pro determinanda quantitate b, cognitis valoribus ipsarum a, & c. Sed æquatio pro determinanda quantitate a, cognito valore ipsius c, habebitur, si æqualitas instituatur inter $\frac{ca^3 - pca^2 + caq + c^2 + u - cr}{2ca - cp}$

&

& $\frac{c^2a^2 - c^2pa + c^2q - ct}{c^2 - u}$, utpote valores unius ejuſdemq; quantitatis b. In hac æquatioue quantitas a ad tres dimenſiones aſcēdit;ſed alia poterit inveniri, ubi tamē eadem quantitas a erit quatuor dimenſionum. Itaque aſſumpto loco c uno ex diviſoribus ultimi termini propoſitæ æquationis, qui debet eſſe trium dimenſionum, ſi æquatio ſit litteralis, & homogenea, determinanda eſt primùm quantitas a, tum deinde quantitas b: qua ratione determinabitur æquatio $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, per quam dividi debet æquatio propoſita.

Non diſſimiliter determinandæ ſunt æquationes componentes, quum æquatio compoſita plures, quàm ſex, dimenſiones habet; & omnino ſuperfluum exiſtimo, ſuper hac re ulteriùs labores noſtros extendere. Illud hìc nolim reticere, quod ſi in æquatione aliqua litterali loco cujuslibet ex litteris poſito numero aliquo, talis prodeat æquatio numerica, ut reduci non poſſit, nec ipſa æquatio litteralis ſit reducibilis: cujus rei ratio hæc eſt, quia litteræ alphabeti poſſunt omnes quaſcumque quantitates repræſentare. Quod ſi verò æquatio numerica, quæ inde ori-

tur, reduci queat, non inde concludi debet, æquationem ipsam litteralem reducibilem esse; quia fortasse fieri potest, ut æquatio litteralis in eâ tantùm hypothesi sit reducibilis.

VII.

De reductione æquationum, in quibus duæ, aut plures radices sunt æquales.

ÆQuationes, in quibus duæ, aut plures radices sunt æquales, in propriâ suâ sede nequaquam existunt, sed semper ad gradum alterum inferiorem deprimi possunt. Id difficultatem nullam involuit, quotiescumque radices æquales sunt commensurabiles, ac rationales; nam perspicuum est, ad constitutionem ipsarũ æquationũ tot simplices æquationes concurrere, quotus est numerus radicũ æqualium. Quod si verò radices æquales sint incommensurabiles, ac radicales, tunc res fiet manifesta, si ex duabus, aut pluribus radicibus, quæ sint æquales, & incommensurabiles, æquatio constituatur; nam liquidò patebit, æquationem ad altiorem qui lem gradum ascendere, quàm incommensurabilitas cujusque radicis ostendit. Jam

Jam reductio istarum æquationum, in quibus duæ, aut plures radices sunt æquales, iisdem fermè regulis perfici potest, quibus omnium aliarum æquationum reductio instituitur. Sed nihilominus placet nobis, hujusmodi æquationes speciatim considerare, quia nempe longe faciliùs aliâ ratione ad propriam suam sedem deprimi possunt. Dabimus ergo pro reducendis huiusmodi æquationibus duplicem methodum, quarum utraque in eo consistit, ut una ex radicibus æqualibus inveniatur. Eâ etenim inventâ, vel solius divisionis ope æquationem deprimi posse, nemo non videt.

Prior itaque methodus hæc est. Assumantur indeterminatè tot radices æquales, quot æquatio proposita supponitur habere. Tum ex iis constituatur æquatio, quæ pauciores quidem dimensiones, quàm proposita, habere potest, plures autem habere non potest. Jam si æquatio ista non habeat tot dimensiones, quot proposita, multiplicetur per aliam æquationem, totidem, quót ei desunt, dimensiones habentem. Sic enim habebitur æquatio, in qua tot erunt dimensiones, quot proposita complectitur. Comparentur porrò termini unius æquationis cum

terminis alterius, & istius comparationis ope unaquæque ex radicibus æqualibus determinabitur.

Proponatur, exempli gratiâ, æquatio duarum dimensionum $x^2 - 6x + 9 = 0$, in qua radices duæ sunt æquales. Designetur unaquæque illarum radicum litterâ m. Itaque si fiat $x - m = 0$, & multiplicetur $x - m = 0$ per $x - m = 0$, habebitur æquatio similiter duarum dimensionum $x^2 - 2mx + m^2 = 0$. Comparentur termini istius cum terminis æquationis propositæ, & habebuntur æquationes duæ, una $2m = 6$, altera $m^2 = 9$, ex quarum alterutrâ infertur $m = 3$. Quare æquationes, ex quibus componitur æquatio proposita $x^2 - 6x + 9 = 0$, erunt $x - 3 = 0$, & $x - 3 = 0$.

Multiplicetur æquatio $x^2 - 6x + 9 = 0$ per $x + 2 = 0$, & oporteat æquationis inde ortæ $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$ radices duas æquales definire. Designetur rursus litterâ m unaquæque illarum radicum. Itaque si multiplicetur $x - m = 0$ per $x - m = 0$, habebit æquatio $x^2 - 2mx + m^2 = 0$ duas radices æquales. Multiplicetur ista per æquationem simplicem $x + a = 0$, ut alia oriatur

trium

trium dimensionum $x^3 - 2mx^2 + ax^2$, $- 2amx + m^2x + am^2 = 0$. Conferantur termini istius cum terminis æquationis propositæ, & habebitur $2m - a = 4$, $2am - m^2 = 3$, & $am^2 = 18$. Unde quum in primâ istarum æquationum sit $2m - 4 = a$, ponendo tum in secundâ, cùm in tertia loco a valorem illum, una fiet $3m^2 - 8m = 3$, altera $2m^3 - 4m^2 = 18$, ex quarum alterutrâ infertur $m = 3$.

Esto nunc æquatio trium dimensionum $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$, in qua omnes radices sunt æquales. Designet quoque littera m unamquamque illarum radicum. Itaque, si multiplicetur $x - m = 0$ per $x - m = 0$, & quod producitur $x^2 - 2mx + m^2 = 0$ multiplicetur rursus per $x - m = 0$, orietur æquatio trium dimensionum $x^3 - 3mx^2 + 3m^2x - m^3 = 0$, quæ erit ejusdem formæ cum æquatione propositâ, quum similiter omnes habeat radices æquales. Comparentur ergo termini unius cum terminis alterius, & habebitur $3m = 9$, $3m^2 = 27$, & $m^3 = 27$. Unde, quia ex unaquaque istarum eruitur $m = 3$, erit in propositâ æquatione numerus 3 valor cujusque radicis.

Sed

Sed eadem æquatio $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$ multiplicetur per $x + 2 = 0$, & oporteat æquationis inde ortæ $x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 27x - 54 = 0$ tres radices æquales determinare. Constituatur rursus æquatio indeterminata $x^3 - 3mx^2 + 3m^2x - m^3 = 0$, quæ tres habeat radices æquales; tum quia æquatio ista est una dimensione minor, quàm proposita, multiplicetur adhuc per æquationem simplicem $x + a = 0$, ut alia oriatur quatuor dimensionum $x^4 - 3mx^3 + ax^3 + 3m^2x^2 - 3amx^2 - m^3x + 3am^2x - am^3 = 0$. Conferantur jam termini unius cum terminis alterius, & habebitur $3m - a = 7$, $3m^2 - 3am = 9$, $3am^2 - m^3 = 27$, & $am^3 = 27$. Unde, quia in primâ istarum æquationum fit $3m - 7 = a$, ponendo in aliis loco a valorem istum, una fiet $-6m^2 + 21m = 9$, altera $8m^3 - 21m^2 = 27$, & ultima $3m^4 - 7m^3 = 27$, ex quarum unaquaque eruitur $m = 3$.

Jam, quum æquatio tot habet radices æquales, quot sunt dimensiones ejus, æquationes particulares, quarum ope determinanda est quantitas m, sunt semper puræ, adeoque nullo negotio resolvi possunt. Sed quum nequaquam tot conti-

net

nec radices æquales, tunc æquationes illæ particulares prodeunt affectæ, adeoque, quæ difficultas vitanda est pro reducenda æquatione principali regulis superiùs traditis, eadem in resolvendis æquationibus illis particularibus occurrit. Interim, si consideremus in omnibus illis æquationibus quantitatem m unum eundemque valorem habere, facilè apparebit, quod ad determinandam quantitatem m satis sit duarum ex illis æquationibus communem divisorem invenire, nec proinde oporteat, singulas illas æquationes resolvere.

Altera methodus, pro reducendis hujusmodi æquationibus, pendet ex hoc theoremate, quod si termini alicujus æquationis, duas, aut plures radices æquales habentis, multiplicentur ordine per terminos alicujus progressionis arithmeticæ, altera oriatur æquatio, in qua, unâ demptâ, eædem erunt radices æquales. Hujus theorematis veritas abundè liquet, quum omnes æquationis radices sunt æquales. Etenim si termini æquationis $x^2 - 2mx + m^2 = 0$, quæ duas continet radices æquales, multiplicentur ordine per terminos istius progressionis a, $a+b$, $a+2b$, quæ omnes quascumque

que progressiones arithmeticas repræsentare potest, prodibit æquatio $ax^2 - 2amx - 2bmx + am^2 + 2bm^2 = 0$, quæ dividi potest exactè per $x - m$. Et si æquatio fuerit $x^3 - 3mx^2 + 3m^2x - m^3 = 0$, multiplicatis terminis ejus ordine per terminos progressionis a, $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$, alia orietur, quæ dividi poterit exactè per $x^2 - 2mx + m^2$; atque ita de aliis.

Quum verò non omnes æquationis radices sunt æquales, ostendetur idem theorema, si sedulò consideretur, quantitatem, quæ dividi potest per alteram datam quantitatem, per eandem adhuc dividi posse, tametsi per tertiam aliam quantitatem multiplicetur. Ut si fuerit quantitas $ac + bc$, quæ dividi potest per $a + b$, multiplicando eam per $m + n$, producetur quantitas $acm + bcm + acn + bcn$, quæ adhuc dividi poterit per $a + b$. Ex quo fit, ut si termini alicujus æquationis, cujus omnes radices sunt æquales, multiplicentur, non modò singuli per singulos terminos alicujus progressionis arithmeticæ, verùm etiam omnes per aliam quandam quantitatem, æquatio, quæ producitur, easdem habeat radices æquales, unâ demptâ.

Jam

Jam æquatio, cujus non omnes radices sunt æquales, considerari potest; velut producta, multiplicando æquationem, omnes radices æquales habentem, per aliam, cujus radices ab iis sunt diversæ. Ut si æquatio fuerit tertii gradus, & in eâ duæ tantùm radices sint æquales, considerari ea poterit, veluti orta ex multiplicatione æquationis $x^2 - 2mx + m^2 = 0$, duas radices æquales habentis, per æqationem simplicem $x + n = 0$, cujus radix sit ab iis diversa. Unde, quia ex hac multiplicatione duo oriuntur producta partialia, unum ex $x^2 - 2mx + m^2$ in x, alterum ex $x^2 - 2mx + m^2$ in a; perspicuum est, unumquodque istorum productorum non aliud esse, quàm æquationem, omnes radices æquales habentem, per aliam quandam quantitatem multiplicatam; atque adeo verum esse theorema, si cum singulis hisce productis nobis solummodo res esset.

Et quidem tametsi duo illa producta in æquatione propositâ tertii gradus inter se conjuncta reperiantur; perinde tamen res est, ac si cum iis seorsim ageretur. Ut enim duo illa producta constituant simul æquationem tertii gradus, debent ita quidem disponi quemadmodũ hìc vides.

x^3

$$x^3 - 2mx^2 + m^2x$$
$$+ nx^2 - 2mnx + m^2n.$$

Quare multiplicando terminos istius æquationis ordine per terminos progressionis arithmeticæ a, $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$; jam termini prioris producti $x^3 - 2mx^2 + m^2x$ multiplicantur per terminos progressionis a, $a + b$, $a + 2b$; & termini alterius producti $nx^2 - 2mnx + m^2n$ multiplicantur per terminos $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$, qui similiter progressionem arithmeticam constituunt. Perinde itaque res est, ac si cum productis illis seorsim ageretur. Unde, quia factâ multiplicatione, unumquodque illorum productorum debet unam continere radicem æqualem, continebit etiam radicem unam æqualem æquatio, quæ ex iisdem productis constituitur.

Eadem autem est demonstratio, quum æquatio est plurium, quàm trium, dimensionum, & plures item, quàm duas, continet radices æquales. Sed videamus modò, qua ratione ope hujus theorematis inveniri possint radices æquales æquationis propositæ, & ipsa æquatio ad propriam suam sedem deprimi: nimirum, quia

quia omnis æquatio, quæ plures habet radices æquales, in aliam converti potest, in qua contineantur eædem radices æquales, unâ demptâ; si utique omnes ejus termini multiplicentur ordine per terminos alicujus progressionis arithmeticæ, per diversas hujusmodi multiplicationes talis sæpe haberi poterit æquatio, ut unā tantùm contineat radicum æqualiū. Unde si istius, & æquationis propositæ communis divisor capiatur, ille dabit radicem æqualem optatam.

Itaque, quum in aliquâ æquatione tres fuerint radices æquales, ad inveniendam æquationem alteram, quæ unicam tātùm contineat illarum radicum, necesse est terminos illius bis quidem multiplicare per terminos alicujus progressionis arithmeticæ; atque ita quoque multiplicandi sunt ter, si radices æquales fuerint quatuor; quater, si quinque; atque ita deinceps; nam per singulas hujusmodi multiplicationes una tantùm radicum æqualium tollitur. Cæterùm, si in æquatione desit aliquis terminus, is designandus est stellulâ, quo suum quoque habeat terminum progressionis correspondentem. Nec abs re erit hìc adnotare, quod si ea semper progressio arithmetica eligatur,

quæ

quæ vel incipit à zero, vel in zero desinit; æquationes, quæ inveniuntur, sint semper uno saltem gradu inferiores iis, quarum terminos per terminos progressionis arithmeticæ oportet multiplicare.

CAP. VI.

De resolutione æquationum secundi gradus.

PRoximum jam est, ut æquationum, in propriâ suâ sede existentium, resolutionem ostendamus: quæ quidem resolutio est totius artificii analytici coronis, ac complementum. Neque enim satis est in resolutione alicujus problematis æquationem invenire, quæ unicam incognitam comprehendens, singulas problematis conditiones includat, & æquationem illam, si fuerit composita, in suas componentes resolvere, eandemque ad propriam suam sedem revocare: nisi deinde regulæ habeantur, quibus instructus possit Analysta æquationem, in propriâ suâ sede existentem, subinde resolvere, ut ope ejus rosolutionis singulos incognitæ valores valeat eruere. Nam problema, quod proponitur, tunc dicitur resolutum, quum

quum finguli valores magnitudinis, quæ principaliter quæritur in illo problemate, non ignorantur.

Itaque resolutio æquationum, quam modò explicãdam aggredimur, in hoc differt à resolutione, traditâ superiori capite, quod per eam æquationes compositæ, & in propriâ suâ sede non existentes, in suas componentes resolvuntur, atque ita ad propriam suam sedem revocantur; per istam æquationes, jam existentes in propriâ suâ sede, resolvuntur eâ quidem ratione, ut qui sint valores, quos in iis habet incognita, nobis innotescat. Ordiemur autem à resolutione æquationum secundi gradus, hoc est earum, quarum propria sedes in secundo gradu reperitur. Hujusmodi æquationes possunt esse duplicis generis; vel enim sunt puræ, cujusmodi sunt illæ, quæ secundo termino carent; vel affectæ, quales sunt eæ, quæ secundum terminum habent. Puræ nonnisi duplicis formæ esse possunt; nam vel induunt hanc formam $x^2 - q = 0$, vel etiam hanc aliam $x^2 + q = 0$. Sed æquationes affectæ ad sequentes quatuor formulas reducuntur.

$$x^2 - 2px - q = 0$$
$$x^2 + 2px - q = 0$$
$$x^2 - 2px + q = 0$$
$$x^2 + 2px + q = 0.$$

Quantum ad æquationes puras, earum resolutio solâ radicis quadratæ extractione potest obtineri. Si enim habeatur $x^2 - q = 0$, erit $x^2 = q$; atq; adeo extrahendo hinc inde quadratam radicem, erit vel $x = +\sqrt{q}$, vel $x = -\sqrt{q}$: proindeque radices duæ illius æquationis erunt $+\sqrt{q}$, & $-\sqrt{q}$, quarum liquet unam esse positivam, alteram negativam. Et similiter si habeatur $x^2 + q = 0$, erit $x^2 = -q$; atque adeo, extractâ ex utraque parte æquationis quadratâ radice, fiet vel $x = +\sqrt{-q}$, vel $x = -\sqrt{-q}$: Unde radices duæ alterius hujus æquationis $x^2 + q = 0$ erunt $+\sqrt{-q}$, & $-\sqrt{-q}$, quarum utramque liquet imaginariam esse.

Quantum ad æquationes affectas, propter ipsam affectionem, non est ita facilis illarum resolutio, sed necesse est, vel delere ex iis affectionem, tollendo methodo superius traditâ secundum terminum, quum hac ratione evadant puræ; vel ad utramque partem æquationis addere qua-

dra-

dratum, quod fit ex quantitate cognitâ ſecundi termini dimidiatâ, ut una pars evadat quadratum perfectum. Utraq; hujuſmodi æquationes reſolvendi ratio jam ſuperiùs obiter à nobis fuit expoſita. Sed utramque nunc rurſus afferemus, nec alias præteribimus rationes, quibus earundem æquationum reſolutio poteſt obtineri.

I.

Reſolutio primæ formulæ $x^2 - 2px - q = 0$.

Æquationes ſecundi gradus, quæ continentur ſub primâ formulâ $x^2 - 2px - q = 0$, duas admittunt radices, unam poſitivam, alteram negativam. Eſt enim in iis una ſignorum varietas, & una item ſignorum ſimilitudo. Sed in iiſdem æquationibus radix poſitiva major eſt ſemper radice negativâ. Nam quantitas cognita ſecundi termini in omni æquatione, ut ſuperiùs vidimus, eſt ſumma radicum ſub ſigno mutato. Itaque quia in hiſce æquationibus ſecundus terminus afficitur ſigno —, erit viciſſim in iis ſumma radicum poſitiva: quod equidem fieri non poteſt, niſi radix poſi-

tiva major ſit radice negativâ.

Jam radices iſtius æquationis $x^2 - 2px - q = o$ poſſunt primo loco inveniri, ſi ex ea deleatur affectio, tollendo ſecundum terminum methodo ſuperiùs traditâ. Hunc in finem ponatur $x - p = y$, ſive $x = y + p$. Et ſiquidem ſcribatur $y + p$ loco x, & $y^2 + 2py + p^2$ loco x^2, orietur æquatio $y^2 - p^2 - q = o$, quæ, ut vides, ſecundo termino caret. Itaque, quum habeatur $y^2 = p^2 + q$, extrahendo hinc inde radicem quadratam, erit tum $y = + \sqrt{p^2 + q}$, tum $y = - \sqrt{p^2 + q}$; adeoque ſubrogando loco y valorem ſuum $x - p$, habebitur tam $x - p = + \sqrt{p^2 + q}$, quàm $x - p = - \sqrt{p^2 + q}$, ex quibus infertur, & $x = p + \sqrt{p^2 + q}$, & $x = p - \sqrt{p^2 + q}$.

Itaque radices duæ propoſitæ æquationis $x^2 - 2px - q = o$ ſunt $p + \sqrt{p^2 + q}$, & $p - \sqrt{p^2 + q}$, quod exinde etiam liquere poteſt, quia utraque ſubſtituta in æquatione loco incognitæ x facit æquationis terminos omnes evaneſcere. Illarum primam poſitivam eſſe, nemo non videt; ſed & alteram negativam eſſe, facile percipiet, quicumque advertet radi-

cem

cem quadratam ex $p^2 + q$, majorem esse, quàm p. Ipsam porrò radicem positivam ratione quantitatis majorem esse radice negativâ, ultrò etiam liquet, quum illa exprimatur per summam quantitatum p, & $\sqrt{p^2 + q}$, hæc per differentiam earundem quantitatum. Inventæ sunt ergo radices propositæ æquationis, & tales quidem, quales exigit ipsa æquationis natura: nempe, ut una sit positiva, altera negativa; & insuper, ut radix positiva major sit radice negativâ.

Eædem æquationis radices possunt secundo loco inveniri, addendo ad utramque partem æquationis quadratum, quod fit ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ, ut una pars quadratum fiat perfectum. Itaque, quum sit $x^2 - 2px - q = 0$; erit $x^2 - 2px = q$; adeoque addendo ad utramque partem quadratum, quod fit ex p, semisse quantitatis cognitæ secundi termini, erit $x^2 - 2px + p^2 = p^2 + q$: quare extractâ ex utraque parte æquationis radice quadratâ, fiet tum $x - p = + \sqrt{p^2 + q}$, tùm $x - p = - \sqrt{p^2 + q}$, ex quibus rursus infertur, & $x = p + \sqrt{p^2 + q}$, & $x = p - \sqrt{p^2 + q}$.

Possunt ulteriùs radices eædem inveni-

ri hac aliâ methodo. Ponatur illarum radicum una esse $+ a$, & altera $- b$. Itaque si multiplicetur $x - a = 0$ per $x + b = 0$, erit æquatio $x^2 - ax + bx - ab = 0$ ejusdem formæ cum æquatione propositâ $x^2 - 2px - q = 0$. Conferantur jam termini unius cum terminis alterius, & erit $a - b = 2p$, & $ab = q$. Quia ergo habetur $a - b = 2p$, quadrando utramque partem hujus æquationis, erit $a^2 - 2ab + b^2 = 4p^2$. Est autem $ab = q$, hoc est $4ab = 4q$. Quare addendo simul duas hasce æquationes, erit $a^2 + 2ab + b^2 = 4p^2 + 4q$, atque adeo per extractionem quadratæ radicis fiet $a + b = 2\sqrt{p^2 + q}$. Unde quum habeatur $a - b = 2p$. & $a + b = 2\sqrt{p^2 + q}$, erit $a = p + \sqrt{p^2 + q}$, & $- b = p - \sqrt{p^2 + q}$.

Denique radices eædem determinari quoque possunt in hunc modum. Esto $2a$ summa ipsarum, & $2b$ earundem differentia. Itaque radix una erit $a + b$, & radix altera erit $a - b$: proindeque si multiplicetur $x - a - b = 0$ per $x - a + b = 0$, erit æquatio $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ ejusdem formæ cum æquatione propositâ $x^2 - 2px - q = 0$. Quare conferendo terminos unius cum terminis alte-

te-

terius, habebitur $2a = 2p$, & $b^2 - a^2 = q$. Itaque quum ſit $2a = 2p$, erit $a = p$, & $a^2 = p^2$. Unde ſi in æquatione $b^2 - a^2 = q$ loco a^2 ponatur valor ejus p^2, fiet $b^2 - p^2 = q$, ſive $b^2 = p^2 + q$, atque adeò $b = \sqrt{p^2 + q}$. Unde erit $a + b = p + \sqrt{p^2 + q}$, & $a - b = p - \sqrt{p^2 + q}$.

II.

Reſolutio ſecundæ formulæ $x^2 + 2px - q = 0$.

EX radicibus æquationum, quæ comprehenduntur ſub ſecundâ formulâ $x^2 + 2px - q = 0$, ſimiliter una eſt poſitiva, altera negativa. Nam in iis quoque una reperitur ſignorum ſimilitudo, & una item ſignorum varietas. Sed in hiſce æquationibus radix poſitiva ratione quantitatis minor eſt ſemper radice negativâ. Eſt enim in omni æquatione quantitas cognita ſecundi termini ſumma radicum ſub ſigno mutato. Quare, quia in his æquationibus ſecundus terminus afficitur ſigno +, erit viciſſim in iis ſumma radicum negativa: quod ſanè fieri non poteſt, niſi radix poſitiva minor ſit radice negativâ.

Radices autem istius æquationis $x^2 + 2px - q = 0$ inveniemus primò, tollendo ex eâ affectionem, sive secundum terminum, juxtà regulam superiùs traditam. Ponatur ergo $x + p = y$, sive $x = y - p$; & siquidem in æquatione propositâ $x^2 + 2px - q = 0$ scribatur $y - p$ loco x, & $y^2 - 2py + p^2$ loco x^2, orietur hæc altera $x^2 - p^2 - q = 0$, quæ secundo termino caret. Itaque quum sit $y^2 = p^2 + q$, extrahendo hinc inde radicem quadratam, erit tum $y = + \sqrt{p^2 + q}$, cùm $y = - \sqrt{p^2 + q}$. Erat autem $x = y - p$. Quare erit, tam $x = - p + \sqrt{p^2 + q}$, quàm $x = - p - \sqrt{p^2 + q}$: proindeque radices duæ propositæ æquationis erunt $- p + \sqrt{p^2 + q}$, & $- p - \sqrt{p^2 + q}$.

Harum radicum secundam negativam esse, nemo non videt. Sed & primam positivam esse, facilè apparebit, si consideremus radicem quadratam ex $p^2 + q$ majorem esse, quàm p. Quod verò radix positiva ratione quantitatis minor sit radice negativâ, liquidò etiam patet; nam radix positiva exprimitur per differentiam quantitatum, p & $\sqrt{p^2 + q}$, radix verò negativa designatur per summam earundem

dem quantitatum, licèt sub signo mutato. Inventæ sunt igitur radices propositæ æquationis tales quidem, quales invenire oportebat: nempe, ut una sit positiva, altera negativa; & insuper, ut radix positiva minor sit radice negativâ.

Easdem radices inveniemus secundò, addendo ad utramque partem æquationis quadratum, quod fit ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ, ut una pars evadat quadratum perfectum. Itaque quum sit $x^2 + 2px - q = 0$, erit $x^2 + 2px = q$, atque adeò addendo ad utramque partem quadratum, quod fit ex p, semisse quantitatis cognitæ secundi termini, erit $x^2 + 2px + p^2 = p^2 + q$. Unde per extractionem quadratæ radicis erit, vel $x + p = + \sqrt{p^2 + q}$, vel $x + p = - \sqrt{p^2 + q}$, ex quibus eruitur, ut antea, & $x = -p + \sqrt{p^2 + q}$, & $x = -p - \sqrt{p^2 + q}$.

Sed ad determinandas easdem radices utemur etiam hac methodo. Fingamus illarum radicum unam esse $+a$, alteram $-b$. Itaque si multiplicetur $x - a = 0$ per $x + b = 0$, erit æquatio ex harum multiplicatione orta $x^2 - ax + bx - ab = 0$

$= 0$ ejuſdem formæ cum æquatione propoſitâ $x^2 + 2px - q = 0$. Conferantur ergo termini unius cum terminis alterius, & erit $b - a = 2p$, & $ab = q$. Quia itaque habetur $b - a = 2p$, quadrando utramque partem, erit $b^2 - 2ab + a^2 = 4p$. Eſt autem $ab = q$, hoc eſt $4ab = 4q$. Quare additis ſimul duabus hiſce æquationibus, erit $b^2 + 2ab + a^2 = 4p^2 + 4q$; atque adeo per extractionem quadratæ radicis fiet $b + a = 2\sqrt{p^2 + q}$. Unde, quum ſit $b - a = 2p$, & $b + a = 2\sqrt{p^2 + q}$, erit $a = -p + \sqrt{p^2 + q}$, & $-b = -p - \sqrt{p^2 + q}$.

Denique ejuſdem æquationis radices determinabimus etiam hoc artificio. Eſto $-2a$ ſumma ipſarum, & $+2b$ earundem differentia. Itaque radix una erit $-a + b$, & radix altera erit $-a - b$: proindeque ſi multiplicetur $x + a - b = 0$ per $x + a + b = 0$, erit æquatio ex his genita $x^2 + 2ax + a^2 - b^2 = 0$ ejuſdem formæ cum æquatione propoſitâ $x^2 + 2px - q = 0$. Quare factâ mutuâ terminorum collatione, erit $2a = 2p$, & $b^2 - a^2 = q$. Ergo, quum ſit $2a = 2p$, erit $a = p$, & $a^2 = p^2$. Quocirca, ſi in æquatione $b^2 - a^2 = q$, loco a^2 ſcribatur valor ejus p^2, erit

erit $b^2 - p^2 = q$, hoc est $b^2 = p^2 + q$, & consequenter $b = \sqrt{p^2 + q}$. Unde erit $-a + b = -p + \sqrt{p^2 + q}$, & $-a - b = -p - \sqrt{p^2 + q}$.

III.

Resolutio tertiæ formulæ

$$x^2 - 2px + q = 0.$$

SEquitur, ut resolutionem tertiæ formulæ $x^2 - 2px + q = 0$ ostendamus. Et quidem, quia in hac formulâ duæ sunt signorum variationes, nec ulla occurrit signorum similitudo; palam est, radices æquationum, quæ ad hanc formulam reducuntur, ambas esse positivas. Sed hæ interim radices non semper erunt reales. Quum enim ultimus terminus afficiatur signo +, si contingat quadratum ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ minus esse ultimo termino, tunc radices illæ fient imaginariæ, quum radicem contineant quadrati negativi.

Ut autem inveniamus radices hujus æquationis $x^2 - 2px + q = 0$, tollamus ex eâ affectionem, delendo secundum terminum juxtà methodum superiùs traditam. Hunc in finem ponamus $x - p = y$,

$= y$, sive $x = y + p$. Et siquidem in æquatione propositâ $x^2 - 2px + q = 0$ scribamus $y + p$ loco x, & $y^2 + 2py + p^2$ loco x^2, orietur hæc altera $y^2 - p^2 + q = 0$, quæ, ut vides, secundo termino caret. Itaque, quum sit $y^2 = p^2 - q$, erit tum $y = + \sqrt{p^2 - q}$, cùm $y = - \sqrt{p^2 - q}$. Habetur autem $x = y + p$. Quare erit tam $x = p + \sqrt{p^2 - q}$, quàm $x = p - \sqrt{p^2 - q}$: & propterea radices duæ propositæ æquationis erunt $p + \sqrt{p^2 - q}$, & $p - \sqrt{p^2 - q}$.

Harum radicum primam positivam esse, nemo non videt; ambæ enim ejus partes afficiuntur signo $+$. Sed & alteram itidem positivam esse, liquidò patebit, si consideremus radicem quadratam ex $p^2 - q$ minorem esse, quàm p. Has easdem radices imaginarias evadere, quum quadratum ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ p^2 minus est ultimo termino q, ultro etiam liquet. Est enim hoc casu $p^2 - q$ quantitas negativa; adeoque $\sqrt{p^2 - q}$ quantitas erit imaginaria. Sed si fuerit $p^2 = q$, tunc quia evanescet quantitas $p^2 - q$, erunt ambæ æquationis radices æquales semissi quantitatis co-

cognitæ secundi termini, atque adeo æquales inter se.

Possunt eædem radices inveniri quoque, addendo ad utramque partem æquationis quadratum, quod fit ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ, ut una pars quadratum evadat perfectum: nimirum, quum æquatio sit $x^2 - 2px + q = 0$, erit $x^2 - 2px = -q$, atque adeo addito ad utramque partem quadrato, quod fit ex p, semisse quantitatis cognitæ secundi termini, erit $x^2 - 2px + p^2 = p^2 - q$. Unde per extractionem quadratæ radicis fiet, tum $x - p = + \sqrt{p^2 - q}$, cùm $x - p = - \sqrt{p^2 - q}$; ex quibus infertur, ut supra, & $x = p + \sqrt{p^2 - q}$, & $x = p - \sqrt{p^2 - q}$.

Ulteriùs ad inveniendas easdem radices adhiberi etiam potest ea methodus, per quam radices illæ assumuntur indeterminatè. Si enim a sit una radix, & b radix altera, multiplicando $x - a = 0$ per $x - b = 0$, orietur æquatio $x^2 - ax - bx + ab = 0$, quæ erit ejusdem formæ cũ æquatione, de qua agitur, $x^2 - 2px + q = 0$. Quare conferendo terminos unius ordine cũ terminis alterius, habebitur $a + b = 2p$, & $ab = q$. Quia ergo habetur $a + b$

$= 2p$,

$= 2p$, quadrando utramq; partem erit $a^2 + 2ab + b^2 = 4p^2$. Est autem $ab = q$, hoc est $4ab = 4q$. Itaque subducendo æquationem istam ex illâ, erit $a^2 - 2ab + b^2 = 4p^2 - 4q$; atque adeo, per extractionem quadratæ radicis fiet $a - b = 2\sqrt{p^2 - q}$. Unde, quum sit $a + b = 2p$, & $a - b = 2\sqrt{p^2 - q}$, erit $a = p + \sqrt{p^2 - q}$, & $b = p - \sqrt{p^2 - q}$.

Denique determinari quoque possunt eædem radices, mediante hoc artificio. Esto $2a$ summa radicum, & $2b$ earundem differentia. Itaque radix una erit $a + b$, radix verò altera erit $a - b$: proindeque si multiplicetur $x - a - b = 0$ per $x - a + b = 0$, orietur æquatio $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$, quæ erit ejusdem formæ cum æquatione propositâ $x^2 - 2px + q = 0$. Conferantur ergo termini unius ordine cum terminis alterius, eritque $2a = 2p$, & $a^2 - b^2 = q$. Itaque, quum sit $2a = 2p$, erit $a = p$, & $a^2 = p^2$. Unde si in æquatione $a^2 - b^2 = q$, loco a^2 ponatur valor ejus p^2, fiet $p^2 - b^2 = q$, hoc est $b^2 = p^2 - q$, atque adeò per extractionem quadratæ radicis erit $b = \sqrt{p^2 - q}$: proindeque erit $a + b = p + \sqrt{p^2 - q}$, & $a - b = p - \sqrt{p^2 - q}$.

Re-

IV.

Resolutio quartæ formulæ $x^2 + 2px + q = 0$.

Reliquum est, ut ostendamus resolutionem quartæ, & ultimæ formulæ $x^2 + 2px + q = 0$. Et quidem, quia in istâ formulâ nulla est signorum varietas, sed termini omnes afficiuntur signo $+$, radices æquationum, quæ ad eam reducuntur, erunt ambæ negativæ. Sed hìc quoque radices istæ non semper sunt reales. Nam si contingat, quadratum, quod fit ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ minus esse ultimo termino, tunc utraque radicum fiet imaginaria, quum in utraque radix occurrat quadrati negativi.

Hujus formulæ radices quatuor quoque modis investigabimus. Prior autem sit ille, qui procedit delendo ex eâ affectionem, hoc est secundum terminum, juxtâ methodum superiùs traditam. Itaque, si ponatur $x + p = y$, & in æquatione propositâ $x^2 + 2px + q = 0$ scribatur $y - p$ loco x, & $y^2 - 2py + p^2$ loco x^2, orietur hæc altera $y^2 - p^2 + q = 0$, quæ se-

secundo termino caret. Et quoniam habetur $y^2 = p^2 - q$, erit tum $y = + \sqrt{p^2 - q}$, cùm $y = - \sqrt{p^2 - q}$. Unde, quum sit $x = y - p$, erit tam $x = -p + \sqrt{p^2 - q}$, quàm $x = -p - \sqrt{p^2 - q}$: proindeque radices duæ propositæ æquationis erunt $-p + \sqrt{p^2 - q}$, & $-p - \sqrt{p^2 - q}$.

Harum radicum secundam negativam esse nemo non videt, quum utraque pars ejus sit quantitas negativa; sed primam quoque negativam esse, facilè apparebit, si consideretur, quod radix quadrata quantitatis $p^2 - q$ minor sit, quàm p. Utramque porrò radicem imaginariam fieri, quotiescumque quadratum ex semisse quantitatis cognitæ secundi termini p^2, minus est ultimo termino q, liquidò etiam patet. Fit enim hoc casu $p^2 - q$ quantitas negativa, adeoque $\sqrt{p^2 - q}$ velut radix quadrati negativi quantitas erit imaginaria. Sed si fuerit $p^2 = q$, tunc evanescente quantitate $p^2 - q$, erunt ambæ æquationis radices æquales semissi quantitatis cognitæ secundi termini, atque adeo æquales inter se.

Alter modus determinandi radices æqua-

quationis $x^2 + 2px + q = 0$ ille fit, qui unam partem æquationis quadratum reddit perfectum, addendo ad utramque partem quadratum, quod fit ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ. Itaq; quum habeatur $x^2 + 2px + q = 0$, erit $x^2 + 2px = -q$, adeoque addito ad utramque partem quadrato, quod fit ex p, semisse quantitatis cognitæ secundi termini, erit $x^2 + 2px + p^2 = p^2 - q$. Unde per extractionem quadratæ radicis fiet, tum $x + p = + \sqrt{p^2 - q}$, cùm $x + p = - \sqrt{p^2 - q}$; ex quibus eruitur, ut antea, & $x = -p + \sqrt{p^2 - q}$, & $x = -p - \sqrt{p^2 - q}$.

Tertius modus investigandi radices ejusdem æquationis fit ille, qui eas assumit indeterminatè. Itaque si $-a$ fit radix una, & $-b$ radix altera, multiplicando $x + a = 0$ per $x + b = 0$, producetur æquatio $x^2 + ax + bx + ab = 0$, quæ erit ejusdem formæ cum æquatione, de qua agitur, $x^2 + 2px + q = 0$. Quare conferendo terminos unius ordine cum terminis alterius, erit $a + b = 2p$, & $ab = q$. Quia ergo habetur $a + b = 2p$, erit $a^2 + 2ab + b^2 = 4p^2$, si utraque pars æquationis ad quadratum elevetur. Est

autem $ab = q$, hoc est $4ab = 4q$. Itaque si æquatio ista ex illâ subducatur, erit $a^2 - 2ab + b^2 = 4p^2 - 4q$: proindeque per extractionem quadratæ radicis fiet $a - b = 2\sqrt{p^2 - q}$. Unde, quum sit $a + b = 2p$, & $a - b = 2\sqrt{p^2 - q}$, erit $-a = -p - \sqrt{p^2 - q}$, & $-b = -p + \sqrt{p^2 - q}$.

Denique investigari possunt radices ejusdem æquationis $x^2 + 2px + q = 0$, assumendo indeterminatè radicum illarum tum summam, cùm differentiam. Si enim $-2a$ sit summa radicum, & $-2b$ earundem differentia, erit $-a - b$ radix una, & $-a + b$ radix altera. Quare multiplicando $x + a + b = 0$ per $x + a - b = 0$, producetur æquatio $x^2 + 2ax + a^2 - b^2 = 0$, quæ erit ejusdem formæ cum æquatione propositâ $x^2 + 2px + q = 0$: proindeque, conferendo terminos unius ordine cum terminis alterius, erit $2a = 2p$, & $a^2 - b^2 = q$. Itaque, quum sit $2a = 2p$, erit $a = p$, atque adeo $a^2 = p^2$. Unde, si in æquatione $a^2 - b^2 = q$ loco a^2 ponatur valor ejus p^2, fiet $p^2 - b^2 = q$, hoc est $b^2 = p^2 - q$: proindeque per extractionem quadratæ

ra-

radicis erit $b = \sqrt{p^2 - q}$, eritque adeo $-a - b = -p - \sqrt{p^2 - q}$, & $-a + b = -p + \sqrt{p^2 - q}$.

V.

Usus formularum in resolvendis æquationibus secundi gradus.

Nunc qui debeat esse usus formularum, quum aliqua secundi gradus æquatio resolvenda proponitur, oportet breviter explicemus. Itaque postquam quatuor illæ formulæ sunt resolutæ, & singularum radices inventæ, haud quidem necesse est, eadem arte æquationes speciales resolvere, sed poterit earum resolutio solius substitutionis ope obtineri. Inquiratur enim, ad quam ex iis formulis proposita æquatio reducatur, eaque cognitâ, siquidem in radicibus inventis illius substituantur valores litterarum p, & q, determinati ab æquatione propositâ, istius jam radices habebuntur.

Proponatur, exmpli gratiâ, resolvenda æquatio secundi gradus $x^2 - 4x - 6 = 0$. Hæc propter signa, quibus termini afficiuntur, reducitur ad primam formulam $x^2 - 2px - q = 0$, Itaque fa-

ctâ terminorum mutuâ collatione, erit $2p = 4$, atque adeo $p = 2$, eritque etiam $q = 6$. Unde, quum radices primæ formulæ sint $p + \sqrt{p^2 + q}$, & $p - \sqrt{p^2 + q}$, substituendo loco p, & q valores illos, fient radices propositæ æquationis $2 + \sqrt{10}$, & $2 - \sqrt{10}$, quarum liquet unam esse positivam, alteram negativam.

Proponatur secundò resolvenda æquatio $x^2 + 6x - 10 = 0$. Hæc, si signa considerentur, quibus termini ipsius afficiuntur, reducitur ad secundam formulam $x^2 + 2px - q = 0$. Quare, conferendo terminos unius ordine cum terminis alterius, erit $2p = 6$, sive $p = 3$, & $q = 10$. Jam verò radices secundæ formulæ sunt $-p + \sqrt{p^2 + q}$, & $-p - \sqrt{p^2 + q}$. Itaque substituendo in radicibus illis loco p, & q valores suos, fient radices propositæ æquationis $-3 + \sqrt{19}$, & $-3 - \sqrt{19}$, ex quibus una quidem est positiva, altera negativa.

Proponatur ulteriùs resolvenda æquatio $x^2 - 6x + 4 = 0$, quæ reducitur ad tertiam formulam $x^2 - 2px + q = 0$, quum in utraque secundus terminus afficiatur signo $-$, & tertius, sive postremus signo $+$. Itaque si termini unius ordine

dine comparentur cum terminis alterius, invenietur $p = 3$, & $q = 4$. Quare, quum radices tertiæ formulæ sint $p + \sqrt{p^2 - q}$, & $p - \sqrt{p^2 - q}$, substituendo in radicibus illis loco p, & q valores suos, fient radices propositæ æquationis $3 + \sqrt{5}$, & $3 - \sqrt{5}$, quarum utramque liquet positivam esse.

Denique oporteat, resolvere æquationem $x^2 + 10x + 15 = 0$, quæ continetur sub quartâ, & ultimâ formulâ $x^2 + 2px + q = 0$, quum in utraque termini omnes afficiantur signo $+$. Jam radices hujus formulæ sunt $-p + \sqrt{p^2 - q}$, & $-p - \sqrt{p^2 - q}$. Itaque quia conferendo terminos unius æquationis ordine cum terminis alterius, fit $p = 5$, & $q = 15$, substituantur in radicibus illis loco p, & q valores isti, & erunt radices propositæ æquationis $-5 + \sqrt{10}$, & $-5 - \sqrt{10}$, quarum utraque est negativa.

Cæterùm nolim hìc reticere, quod hoc artificio resolvi quoque possint æquationes secundi gradus, quarum radices sunt rationales, quæque ideo in propriâ suâ sede non existunt. Si enim multiplicetur $x - 2 = 0$ per $x - 4 = 0$ producetur æquatio secundi gradus $x^2 - 6x + 8 = 0$,

quæ reducitur ad tertiam formulam $x^2 - 2px + q = 0$. Unde quum radices istius formulæ sint $p + \sqrt{p^2 - q}$, & $p - \sqrt{p^2 - q}$, substituendo in iis loco p, & q valores correspondentes, fient radices compositæ æquationis $3 + \sqrt{1}$, & $3 - \sqrt{1}$, hoc est 4, & 2, omninò, ut assumptæ sunt in æquationibus componentibus $x - 2 = 0$, & $x - 4 = 0$.

VI.

Resolutio æquationum derivativarum secundi gradus.

Ad hunc locum pertinet quoque resolutio æquationum derivativarum secundi gradus. Voco autem æquationes derivativas secundi gradus, quæ talis sunt naturæ, ut tametsi dici nequeant secundi gradus, possunt nihilominus in alias secundi gradus transformari: si scilicet loco quadrati, cubi, aut alterius potestatis incognitæ, in æquatione contentæ, incognita alia substituatur.

Hac ratione æquatio $x^4 - 6x^2 - 4 = 0$, tametsi ad quatuor dimensiones ascendat, dicenda est tamen derivativa secundi gradus; quia nempe, si fiat $x^2 = y$, & in ipsâ æquatione scribatur y loco x^2,

& y^2

& y^2 loco x^4, habebitur loco ejus hæc alia $y^2 - 6y - 4 = 0$, quæ, ut vides, est duarum dimensionum, adeoque secundi gradus.

Similiter, si habeatur æquatio $x^6 - 4x^3 - 9 = 0$, in ea quidem incognita ad sex dimensiones assurgit. Verumtamen, quia si fiat $x^3 = y$, & scribatur in ipsâ æquatione y loco x^3, & y^2 loco x^6, mutabitur illa in hanc aliam $y^2 - 4y - 9 = 0$, in qua incognita est duarum dimensionum; dicenda est æquatio proposita derivativa secundi gradus.

Generaliter autem omnis æquatio, quæ continetur sub hac formulâ $x^{2m} \pm px^m \pm q = 0$, ubi m significat numerum quemcumque, & in qua nulla habetur ratio signorum, quibus termini afficiuntur, dicenda est derivativa secundi gradus; quia nempe si ponatur $x^m = y$, & scribatur y loco x^m, & y^2 loco x^{2m}, habebitur æquatio secundi gradus $y^2 \pm py \pm q = 0$.

Unde patet, æquationes derivativas secundi gradus tres tantùm terminos continere, & potestatem, ad quam ascendit incognita in primo termino, esse quadratum illius, ad quam attollitur in termino intermedio. Ex quo licet etiam inferre, in iisdem æquationibus derivativis,

primum terminum tantundem distare ab intermedio, quantum hic distat ab ultimo; vel quod eodem recidit, tot terminos deficere inter primum, & intermedium, quot inter hunc, & ultimum desunt.

Harum ergo æquationum resolutio iisdem poterit regulis exerceri, quibus perficitur resolutio æquationum secundi gradus. Si enim habeatur æquatio $x^4 - 6x^2 - 4 = 0$, ponendo $x^2 = y$, reducetur illa ad æquationem secundi gradus $y^2 - 6y - 4 = 0$, cujus radices sunt $3 + \sqrt{13}$, & $3 - \sqrt{13}$. Itaque, quum sit $x = \sqrt{y}$, si capiantur radices quadratæ quantitatum $3 + \sqrt{13}$, & $3 - \sqrt{13}$, habebuntur radices propositæ æquationis.

Eâdem ratione, si fuerit æquatio $x^6 - 4x^3 - 9 = 0$, ponatur $x^3 = y$, ut factâ substitutione habeatur æquatio secundi gradus $y^2 - 4y - 9 = 0$. Et quoniam radices huius æquationis sunt $2 + \sqrt{13}$, & $2 - \sqrt{13}$, siquidem ex his quantitatibus extrahantur radices cubicæ, propter $x = \sqrt[3]{y}$, erunt cubicæ illæ radices valores propositæ æquationis $x^6 - 4x^3 - 9 = 0$.

Itaque generaliter methodus resolvendi æquationes derivativas secundi gradus hæc

hæc eſt. Transformetur primò æquatio propoſita in aliam ſecundi gradus, ponendo loco quadrati, cubi, aut alterius poteſtatis incognitæ, in æquatione contentæ, incognitam aliam; deinde æquationis hujus radices inveniantur. Et ſiquidem ex his radicibus ea rurſus radix eliciatur, quam deſignat poteſtas incognitæ principalis, in cujus locum ſubſtituta eſt incognita altera, jam ipſius propoſitæ æquationis radices habebuntur.

C A P. VII.

De reſolutione æquationum tertii gradus.

Oſtensâ reſolutione æquationum ſecundi gradus, ad earum nunc æquationum reſolutionem gradum facimus, quarum ſedes in tertio gradu ſubſiſtit. Iſtæ ſimiliter, ſi ſint puræ, vel reducuntur ad hanc formulam $x^3 - q = 0$, vel etiam ad hanc aliam $x^3 + q = 0$. Utriuſque formulæ radix una facili negotio invenitur per ſolam radicis cubicæ extractionem. Quum enim in primâ habeatur $x^3 - q = 0$, hoc eſt $x^3 = q$, erit extrahendo hinc inde radicem cubicam $x = \sqrt[3]{q}$. Et ſimiliter, quum habeatur in

in secundâ $x^3 + q = 0$, hoc est $x^3 = -q$, extrahendo quoque ex utraque parte cubicam radicem, fiet $x = \sqrt{3} - q$, vel quod idem est $x = - \sqrt{3} q$. Unde patet, prioris formulæ radicem esse positivam, posterioris verò negativam.

Quoniam autem omnis æquatio tot radices habere potest, quot in eâ maxima incognitæ potestas habet dimensiones, & non plures; habebit utraque illarum formularum, præter inventam radicem, duas alias, quum in iis incognita x ad tres dimensiones ascendat: unde quâ ratione ex iisdem formulis aliæ duæ illæ radices erui possint, non abs re erit ostendere. Id itaque fit ope divisionis, nempe si unaquæque formula dividatur per æquationem simplicem, inventam suam radicem continentem. Sic enim deprimetur ad aliam, quæ duas tantùm dimensiones habebit, & cujus adeò radices dabunt radices optatas.

Hac ratione, quum in primâ formulâ habeatur $x^3 - q = 0$, & æquatio simplex, quæ continet radicem suam inventam, sit $x - \sqrt{3} q = 0$, dividere oportebit $x^3 - q = 0$ per $x - \sqrt{3} q = 0$, vel etiam $x^3 - a^3 = 0$ per $x - a = 0$, siquidem ponatur $q = a^3$. Itaque, quia fa-

factâ istâ divisione, quotiens oritur $x^2 + ax + a^2$, erit $x^2 + ax + a^2 = 0$, æquatio secundi gradus, quæ ducta in æquationem simplicem $x - a = 0$, producit æquationem propositam $x^3 - a^3 = 0$. Quare inventis duabus radicibus hujus æquationis $x^2 + ax + a^2 = 0$, quæ prodeunt imaginariæ, quum quadratum ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ minus sit ultimo termino, qui afficitur signo $+$; erunt eæ aliæ duæ radices æquationis $x^3 - a^3 = 0$.

Eâdem ratione, quia in secundâ formulâ habetur $x^3 + q = 0$, & æquatio simplex, quæ continet radicem suam inventam, est $x + \sqrt[3]{q} = 0$, dividere oportebit $x^3 + q = 0$ per $x + \sqrt[3]{q} = 0$, sive etiam $x^3 + a^3 = 0$ per $x + a = 0$, siquidem ponatur, ut in antecedenti, $q = a^3$. Quocirca, quia quotiens hujus divisionis est $x^2 - ax + a^2$, erit $x^2 - ax + a^2 = 0$ æquatio secundi gradus, quæ multiplicata per æquationem simplicem $x + a = 0$, producit æquationem tertii gradus $x^3 + a^3 = 0$. Unde inventis radicibus duabus hujus æquationis $x^2 - ax + a^2 = 0$, quæ similiter prodeunt imaginariæ, quia quadratum ex semisse quantitatis cognitæ secundi termini minus

nus est ultimo termino, qui reperitur affectus signo $+$; dabunt eæ alias duas radices æquationis $x^3 + a^3 = 0$.

Æquationes tertii gradus affectæ multiplicis speciei esse possunt. In iis namque oriri potest affectio, vel quia secundus terminus habetur, & tertius deficit, ut in hac æquatione $x^3 + ax^2 - abc = 0$; vel vicissim, quia tertius habetur, & secundus deficit, ut in hac alià $x^3 - a^2x + abc = 0$; vel denique quia tam secundus, quàm tertius terminus in iis reperitur, ut contingit in hac æquatione $x^3 + ax^2 - abx + abc = 0$. Omnes istos casus expendere, longiùs nos ducet, quàm nostrum est animus. Itaque, quum regula habeatur satis expedita, per quam tolli possit ex omni æquatione secundus terminus, satius erit eas tantùm tertii gradus æquationes affectas considerare, quæ secundo termino carentes, tantùm tertium terminum habent. Hæ autem æquationes ad has quatuor sequentes formulas reducuntur.

$$x^3 + 3px - 2q = 0$$
$$x^3 + 3px + 2q = 0$$
$$x^3 - 3px - 2q = 0$$
$$x^3 - 3px + 2q = 0.$$

Un-

Unde non secus, ac factum est in æquationibus secundi gradus, qua ratione quatuor istæ formulæ resolvi possint, sigillatim ostendemus.

I.

Resolutio primæ formulæ $x^3 + 3px - 2q = 0$.

Quoniam in hac primâ formulâ $x^3 + 3px - 3q = 0$ termini hinc inde existentes à termino deficiente eodem signo afficiuntur, radices duæ, quas ii cum illo constituunt, erunt imaginariæ: proindeque formula ipsa unicam tantùm continebit radicem realem, eamque positivam, quæ eruitur ex duobus postremis terminis, quorum signa sunt contraria. Sed nihilominus radices duæ imaginariæ tales esse debent, ut summa ipsarum sit quantitas realis negativa, eaque æqualis radici positivæ. Deest enim in æquatione secundus terminus, ubi radicum omnium summa sub signo mutato continetur.

Itaque pro resolutione hujus formulæ sint $x + a - \sqrt{-3b^2} = 0$, & $x + a + \sqrt{-3b^2} = 0$ æquationes simplices, quæ continent radices duas imaginarias. Quia igitur summa harum radicum est quanti-

tas realis negativa, nimirum $-2a$, erit $x-2a=0$ æquatio simplex, quæ continet radicem realem positivam. Multiplicentur inter se mutuò priores duæ simplices æquationes $x+a-\sqrt{-3b^2}=0$, & $x+a+\sqrt{-3b^2}=0$, & æquatio, quæ exinde oritur $x^2+2ax+a^2+3b^2=0$, multiplicetur porrò per alteram æquationem simplicem $x-2a=0$. Producetur ergo æquatio tertii gradus $x^3+3b^2x-3a^2x-2a^3-6ab^2=0$, quæ erit ejusdem formæ cum æquatione, de qua agitur, siquidem fuerit $3b^2$ major, quàm $3a^2$, hoc est b major, quàm a.

Comparentur jam termini unius æquationis ordine cum terminis alterius, & habebuntur hoc pacto duæ æquationes, nimirum $3b^2-3a^2=3p$, & $2a^3+6ab^2=2q$. Itaque, quia in primâ istarum æquationum habetur $3b^2-3a^2=3p$, hoc est $b^2-a^2=p$; erit, attollendo utramque partem ad cubum, $b^6-3a^2b^4+3a^4b^2-a^6=p^3$. Et similiter, quia in secundâ æquatione habetur $2a^3+6ab^2=2q$, hoc est $a^3+3ab^2=q$, erit elevando utramque partem ad quadratum $a^6+6a^4b^2+9a^2b^4=q^2$. Quare per additionem utriusque æquationis fiet $b^6+6a^2b^4+9a^4b^2=p^3+q^2$; atque adeò

adeò extrahendo hinc inde quadratam radicem, erit $b^3 + 3a^2b = \sqrt{p^3 + q^2}$.

Habemus ergo duas istas æquationes $a^3 + 3ab^2 = q$, & $b^3 + 3a^2b = \sqrt{p^3 + q^2}$. Itaque, si eas in unum addamus, fiet $a^3 + 3ab^2 + b^3 + 3a^2b = q + \sqrt{p^3 + q^2}$; adeoque, per extractionem radicis cubicæ, erit $a + b = \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}}$. Jam verò, subductis à se mutuò iisdem æquationibus, erit $a^3 + 3ab^2 - b^3 - 3a^2b = q - \sqrt{p^3 + q^2}$. Quare, extrahendo rursus hinc inde radicem cubicam, erit $a - b = \sqrt[3]{q - \sqrt{p^3 + q^2}}$: ex quibus eruitur $2a = \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{p^3 + q^2}}$. Est ergo quantitas ista radix realis æquationis $x^3 + 3px - 2q = 0$, quam positivam esse nemo non videt.

Potest ejusdem radicis valor alio quoque modo designari. Habetur enim $b^2 - a^2 = p$. Itaque, quum inventum sit $a + b = \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}}$, dividendo partes illius æquationis per correspondentes par-

tes istius, fiet $b - a = \frac{p}{\sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}}}$: proindeque, si æquatio ista ex illâ subducatur, erit $2a = \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}} - \frac{p}{\sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}}}$: id, quod exinde etiam liquere potest; quia si pars secunda prioris expressionis, quæ est quantitas integra, multiplicetur per denominatorem fractionis, quæ constituit secundam partem alterius hujus expressionis, id, quod producitur, fit $-p$, hoc est numerator ejusdem fractionis.

Inventa radice reali æquationis $x^3 + 3px - 2q = 0$, aliæ duæ radices imaginariæ determinari possunt, vel inveniendo valorem quantitatis b, id quod nullo negotio effici potest, vel etiam dividendo æquationem, de qua agitur, per æquationem simplicem, inventam radicem continentem. Hæc divisio Tyronibus nonnihil molestiæ afferet; sed poterunt substitutione adjuvari. Si enim radicem inventam vocemus c, dividere oportebit $x^3 + 3px - 2q = 0$ per $x - c = 0$;

$= 0$. Oriri autem ex hac divisione æquationem secundi gradus $x^2 + cx + c^2 + 3p = 0$, cujus radices duæ sunt imaginariæ, facilè patebit, si consideremus, quod etsi divisione usque ad hunc terminum peractâ, videatur superesse residuum $c^3 + 3pc - 2q$, hoc tamen residuum idem sit, ac zero, sive nihil; quum subrogatâ loco c incognitâ x, cujus valorem repræsentat, restituat nobis terminos æquationis, de qua agitur, $x^3 + 3px - 2q$, quorum summa est æqualis zero, sive nihilo.

Cæterùm radix realis æquationis $x^3 + 3px - 2q = 0$ potest etiam inveniri hoc artificio. Ponatur $x = y - z$. Itaque, elevando utramque partem æquationis ad cubum, erit $x^3 = y^3 - 3y^2z + 3yz^2 - z^3$. Et quoniam $- 3y^2z + 3yz^2$ designant productum, quod oritur, multiplicando $y - z$ per $- 3yz$; proinde, si loco $y - z$ ponatur x, fiet $- 3y^2z + 3yz^2 = - 3yzx$: unde erit $x^3 = y^3 - 3yzx - z^3$, hoc est $x^3 + 3yzx + z^3 - y^3 = 0$. Conferantur jam termini istius æquationis ordine cum terminis illius, de qua agitur, & erit $3yz = 3p$, & $z^3 - y^3 = 2q$, quarum æquationum ope facilè erit determinare tum y, cùm z.

Quum enim in primâ habeatur $3yz =$

$3p$, hoc est $yz = p$, erit elevando utramque partem ad cubum $y^3z^3 = p^3$. Et quoniam in secundâ habetur $z^3 - y^3 = 2q$, multiplicando terminos omnes tum per z^3, cùm per y^3, fiet $z^6 - y^3z^3 = 2qz^3$, & $y^3z^3 - y^6 = 2qy^3$: proindeque substituendo in duabus hisce æquationibus loco y^3z^3 valorem suum p^3, una fiet $z^6 - p^3 = 2qz^3$, hoc est $z^6 - 2qz^3 - p^3 = 0$, altera $p^3 - y^6 = 2qy^3$, hoc est $y^6 + 2qy^3 - p^3 = 0$. Unde, quia duæ istæ æquationes sunt derivativæ secundi gradus, facilè erit eas resolvere, atque adeò valores incognitarum y, & z determinare.

II.

Resolutio secundæ formulæ

$$x^3 + 3px + 2q = 0.$$

SImiliter in hac secundâ formulâ $x^3 + 3px + 2q = 0$, quia termini hinc inde positi à termino deficiente eodem signo sunt affecti, radices duæ, quas ii cum illo constituunt, imaginariæ erunt: quocirca formula ipsa unicam tantùm continebit radicem realem, eamque negativam, quæ eruitur ex duobus postremis terminis, quorum signa sunt similia. Sed quia

quia hic etiam deest secundus terminus, cujus coefficiens in omni æquatione est summa radicum sub signo mutato, necesse est, ut hic quoque radices imaginariæ hujusmodi sint, ut summa ipsarum sit quantitas realis positiva, eaque æqualis radici negativæ.

Itaque pro resolutione alterius hujus formulæ sint $x - a - \sqrt{-3b^2} = 0$, & $x - a + \sqrt{-3b^2} = 0$ æquationes simplices, quæ continent radices duas imaginarias. Quia igitur summa harum radicum est quantitas realis positiva, nimirum $2a$, erit $x + 2a = 0$ æquatio simplex, quæ continet radicem realem negativam. Multiplicentur inter se mutuò priores duæ simplices æquationes $x - a - \sqrt{-3b^2} = 0$, & $x - a + \sqrt{-3b^2} = 0$; quæ verò exinde oritur æquatio $x^2 - 2ax + a^2 + 3b^2 = 0$, multiplicetur porrò per æquationem alteram simplicem $x + 2a = 0$. Producetur ergo æquatio tertii gradus $x^3 + 3b^2x - 3a^2x + 2a^3 + 6ab^2 = 0$, quæ erit ejusdem formæ cum æquatione, de qua agitur, siquidem fuerit $3b^2$ major, quàm $3a^2$, hoc est b major, quàm a.

Comparentur jam termini unius æquationis ordine cum terminis alterius, & ha-

& habebuntur hoc pacto duæ æquationes $3b^2 - 3a^2 = 3p$, & $2a^3 + 6ab^2 = 2q$. Quia ergo in primâ istarum æquationum habetur $3b^2 - 3a^2 = 3p$, hoc est $b^2 - a^2 = p$; erit, elevando utramque partem ad cubum, $b^6 - 3a^2b^4 + 3a^4b^2 - a^6 = p^3$. Et similiter, quia in secundâ æquatione habetur $2a^3 + 6ab^2 = 2q$, hoc est $a^3 + 3ab^2 = q$, erit, elevando utramque partem ad quadratum, $a^6 + 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = q^2$. Quare, per additionem utriusque æquationis, fiet $b^6 + 6a^2b^4 + 9a^4b^2 = p^3 + q^2$; atque adeò, extrahendo hinc inde quadratam radicem, erit $b^3 + 3a^2b = \sqrt{p^3 + q^2}$.

Et quoniam habentur duæ istæ æquationes $a^3 + 3ab^2 = q$, & $b^3 + 3a^2b = \sqrt{p^3 + q^2}$; erit per earum additionem $a^3 + 3ab^2 + b^3 + 3a^2b = q + \sqrt{p^3 + q^2}$: Quare, extrahendo ex utraque parte radicem cubicam, fiet $a + b = \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}}$. Jam verò, si ex æquatione $a^3 + 3ab^2 = q$ auferatur hæc alia $b^3 + 3a^2b = \sqrt{p^3 + q^2}$, orietur $a^3 + 3ab^2 - b^3 - 3a^2b = q - \sqrt{p^3 + q^2}$. Itaque, si ex utraque parte alterius hujus æquationis extrahatur quoque radix cubica, fiet vicissim $a - b =$

$\sqrt[3]{q - \sqrt{p^3 + q^2}}$: unde eruitur $2a =$ $\sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{p^3 + q^2}}$: & propterea radix realis æquationis $x^3 + 3px + 2q = 0$, repræsentata per $-2a$, erit $-\sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}} - \sqrt[3]{q - \sqrt{p^3 + q^2}}$, quam negativam esse nemo non videt.

Poteſt eadem radix aliâ quoque ratione deſignari, nimirum, ſi utamur æquatione ſuperiùs inventâ $b^2 - a^2 = p$. Quum enim habeatur $a + b = \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}}$, dividendo $b^2 - a^2$ per $a + b$, itemque p per $\sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}}$, quia quantitates æquales per alias æquales dividuntur, fiet quotiens unius diviſionis æqualis quotienti, qui ex diviſione alterâ deducitur, nimirum

$$b - a = \frac{p}{\sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}}}:$$

unde erit

$$-2a = -\sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}} + \frac{p}{\sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}}}:$$

quod exinde etiam colligi poteſt, quia ſi pars altera prioris ex-

pressionis multiplicetur per denominatorem fractionis, quæ constituit partem alteram secundæ hujus expressionis, producatur quantitas p, hoc est numerator ejusdem fractionis.

Inventâ radice reali æquationis $x^3 + 3px + 2q = 0$, radices duæ imaginariæ determinari possunt, vel inveniendo quantitatem h, id quod nullo negotio effici potest, vel etiam dividendo æquationem ipsam $x^3 + 3px + 2q = 0$ per æquationem simplicem, inventam radicem continentem. Sed hic quoque, ad divisionis tædium evitandum, vocari poterit radix inventa $-c$, atque adeo dividere $x^3 + 3px + 2q = 0$ per $x + c = 0$. Et quamquam ex hac divisione, invento quotiente $x^2 - cx + c^2 + 3p$, videatur superesse residuum $-c^3 - 3pc + 2q$; attamen residuum istud nullius esse valoris exinde liquet, quia si loco $-c$ substituatur valor ejus x, prodibunt termini ipsius æquationis $x^3 + 3px + 2q = 0$. Est itaque $x^2 - cx + c^2 + 3p$ quotiens exactus illius divisionis; & propterea æquatio, quæ continet radices duas imaginarias æquationis principalis, erit $x^2 - cx + c^2 + 3p = 0$.

Cæterùm radix realis æquationis $x^3 +$ $3px$

$3px + 2q = 0$ potest etiam inveniri hoc artificio. Ponatur $x = y - z$. Itaque, elevando utramque partem hujus æquationis ad cubum, fiet $x^3 = y^3 - 3zy^2 + 3z^2y - z^3$. Jam verò termini duo $-3zy^2 + 3z^2y$ continent id, quod producitur, multiplicando $y-z$, hoc est x per $-3zy$. Quare erit $-3zy^2 + 3z^2y = -3zyx$; & propterea fiet $x^3 = y^3 - 3zyx - z^3$, hoc est $x^3 + 3zyx - y^3 + z^3 = 0$. Comparentur jam termini istius æquationis cum terminis æquationis, de qua agitur, $x^3 + 3px + 2q = 0$, & habebuntur hoc pacto duæ aliæ æquationes, nimirum $3zy = 3p$, & $z^3 - y^3 = 2q$, quarum æquationum ope facilè erit determinare utramque quantitatum y, & z.

Quum enim in primâ habeatur $3zy = 3p$, hoc est $zy = p$, erit elevando utramque partem hujus æquationis ad cubum $z^3y^3 = p^3$. Est autem in secundâ $z^3 - y^3 = 2q$, hoc est $z^3y^3 - y^6 = 2qy^3$, vel etiam $z^6 - z^3y^3 = 2qz^3$. Itaque, si in duabus hisce æquationibus loco z^3y^3 ponatur valor ejus p^3, una fiet $p^3 - y^6 = 2qy^3$, hoc est $y^6 + 2qy^3 = p^3$, & altera $z^6 - p^3 = 2qz^3$, hoc est $z^6 - 2qz^3 = p^3$. Unde quum duæ istæ æquationes sint derivati-

væ secundi gradus, facilè erit eas resolvere, & consequenter invenire valores quantitatum y, & z, quarum differentia $y - z$ est æqualis incognitæ x.

III.

Resolutio tertiæ formulæ
$x^3 - 3px + 2q = 0$.

Quum in hac tertiâ formulâ $x^3 - 3px + 2q = 0$ termini hinc inde positi à termino deficiente contrariis signis afficiantur; radices, quas ipsi cum illo constituunt, poterunt quidem esse reales, quales utique si fuerint, una erit positiva, altera negativa. Unde, quum eadem æquatio propter postremos duos terminos, contrariis item signis affectos, aliam habeat radicem realem positivam; poterit æquatio ipsa tribus radicibus realibus explicari, duabus quidem positivis, & unâ negativâ. Quumque deficiat in æquatione secundus terminus, cujus coefficiens est summa radicum sub signo mutato; perspicuum est, radices positivas tales esse debere, ut summa ipsarum æqualis sit radici negativæ.

Interim non negamus, radices duas positi-

sitivas istius æquationis $x^3 - 3px + 2q = 0$ posse quandoque imaginarias evadere, nimirum quum fuerit cubus ex triente quantitatis cognitæ tertii termini minor quadrato, quod fit ex semisse quantitatis cognitæ, quæ ultimum terminum constituit, hoc est p^3 minor, quàm q^2. Quocirca tunc demum omnes hujus æquationis radices reales erunt, quum p^3 non est minor, quàm q^2, sed vel major, vel æqualis. Nec silentio præteribimus, quod quum fuerit p^3 æqualis q^2, tunc radices duæ positivæ sint æquales inter se, atque adeo æquatio ipsa per regulas superiùs traditas semper deprimi possit.

Hæc omnia ut ostendamus, sint $x - a - \sqrt{3b^2} = 0$, & $x - a + \sqrt{3b^2} = 0$ æquationes simplices, quæ continent radices positivas, ponendo nempe a majorem, quàm $\sqrt{3b^2}$. Itaque, quia summa istarum radicum est $2a$, atque huic propter secundum terminum deficientem æqualis esse debet radix negativa, erit $x + 2a = 0$ æquatio simplex, quæ continet radicem negativam. Multiplicentur ergo inter se mutuò priores duæ simplices æquationes $x - a - \sqrt{3b^2} = 0$, & $x - a + \sqrt{3b^2} = 0$; ea verò, quæ exinde producitur $x^2 - 2ax + a^2 - 3b^2 = 0$ multiplicetur

tur per tertiam æquationem simplicem $x + 2a = 0$: qua ratione orietur æquatio tertii gradus $x^3 - 3a^2x^2 - 3b^2x + 2a^3 - 6ab^2 = 0$, quæ erit ejusdem formæ cum æquatione, de qua agitur, $x^3 - 3px + 2q = 0$, quum ex hypothesi $2a^3$ major sit, quàm $6ab^2$: proindeque factâ mutuâ terminorum collatione, habebitur $3a^2 + 3b^2 = 3p$, & $2a^3 - 6ab^2 = 2q$.

Ergo quia in primâ istarum æquationum habetur $3a^2 + 3b^2 = 3p$, erit $a^2 + b^2 = p$. Quare, attollendo utramque partem ejus ad cubum, sive tertiam potestatem, fiet $a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = p^3$. Et quoniam in secundâ æquatione habetur $2a^3 - 6ab^2 = 2q$, erit $a^3 - 3ab^2 = q$; atque adeò, elevando utramque ejus partem ad quadratum, sive secundam potestatem, fiet $a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = q^2$. Subducantur jam partes hujus æquationis ordine ex partibus illius, & habebitur hæc altera $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6 = p^3 - q^2$, cujus ope facilè patebit, radices duas positivas æquationis $x^3 - 3px + 2q = 0$ reales esse, & inæquales, quum fuerit p^3 major, quàm q^2; esse verò reales, & æquales, quum habetur $p^3 = q^2$; ac denique imaginarias esse, quotiescumque p^3 minor est, quàm q^2.

Ra-

Radices namque duæ positivæ æquationis $x^3 - 3px + 2q = 0$ designatæ sunt per $a + \sqrt{3b^2}$, & $a - \sqrt{3b^2}$. Itaque, quum radices istæ sunt reales, & inæquales, erit $3b^2$ quantitas positiva, & minor quidem, quàm a^2: quod profectò quum contingit, positiva erit quantitas $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6$, & consequenter positiva quoque quantitas $p^3 - q^2$, cui illa est æqualis; proindeque p^3 major erit, quàm q^2. At verò quum radices illæ sunt reales, & æquales, necesse est, ut quantitas $3b^2$ evanescat: quod utique quum accidit, evanescit quantitas $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6$, atque adeo evanescente $p^3 - q^2$, erit $p^3 = q^2$. Et denique, quum radices illæ sunt imaginariæ, erit $3b^2$ quantitas negativa: quo casu erit etiam negativa quantitas $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6$, & consequenter quum sit quoque negativa quantitas $p^3 - q^2$, erit p^3 minor, quàm q^2.

Nunc videamus, qua ratione radices illæ erui possint: qua in re singulos oportet casus prosequamur. Et primò quidem, quum radices duæ positivæ sunt imaginariæ, sint $x - a - \sqrt{-3b^2} = 0$, & $x - a + \sqrt{-3b^2} = 0$ æquationes simplices, quæ continent radices illas. Itaque si æqua-

si æquatio ex illarum multiplicatione orta $x^2 - 2ax + a^2 + 3b^2 = 0$ multiplicetur per hanc aliam æquationem simplicem $x + 2a = 0$, quæ continet radicem realem negativam, erit $x^3 - 3a^2x + 3b^2x + 2a^3 + 6ab^2 = 0$ ejusdem formæ cum æquatione, de qua agitur, $x^3 - 3px + 2q = 0$. Quare, factâ mutuâ terminorum collatione, habebuntur duæ aliæ æquationes $3a^2 - 3b^2 = 3p$, & $2a^3 + 6ab^2 = 2q$.

Quia ergo in primâ istarum æquationum habetur $3a^2 - 3b^2 = 3p$, hoc est $a^2 - b^2 = p$, erit elevando utramque partem ad cubum $a^6 - 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - b^6 = p^3$. Et rursus, quia in secundâ habetur $2a^3 + 6ab^2 = 2q$, hoc est $a^3 + 3ab^2 = q$, erit elevando utramque partem ad quadratum $a^6 + 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = q^2$. Unde, si ex partibus istius subducantur ordine partes illius, orietur hæc altera æquatio $9a^4b^2 + 6a^2b^4 + b^6 = q^2 - p^3$, quæ per extractionem quadratæ radicis, fiet $3a^2b + b^3 = \sqrt{q^2 - p^3}$. Habetur autem $a^3 + 3ab^2 = q$. Itaque per additionem erit $a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3 = q + \sqrt{q^2 - p^3}$, per subtractionem verò $a^3 + 3ab^2 - 3a^2b - b^3 = q - \sqrt{q^2 - p^3}$,

ex

ex quibus quum inferatur per extractione radicis cubicæ $a + b = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}$, & $a - b = \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$, erit $2a = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$: proindeque radix realis negativa æquationis erit hæc eadem quantitas contrariis signis affecta.

Nec silentio præteribimus, posse hanc eandem radicem, non secus, ac in superioribus formulis factum, aliâ quoque ratione designari, nimirum si repertâ æquatione $a + b = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}$, per partes istius dividamus ordine partes alterius hujus æquationis $a^2 - b^2 = p$ superiùs inventæ. Cæterùm inventâ radice reali negativâ, radices duæ imaginariæ determinari possunt, vel inveniendo valorẽ quantitatis b, vel etiam ope divisionis. Sed quotiens, qui ex divisione oritur, erit $x^2 - cx - 3p + c^2 = 0$, si fuerit $x + c = 0$ æquatio simplex, quæ continet radicem inventam. Etsi enim dividẽdo $x^3 - 3px + 2q = 0$ per $x + c = 0$, videatur divisio peragi non posse, quum invento quotiente $x^2 - cx - 3p + c^2$ supersit $- c^3 + 3pc + 2q$; attamen residuum illud idem

va-

valet, ac zero, sive nihil, quia si loco $-c$ subrogetur valor ejus x, prodibunt ipsi termini æquationis dividendæ $x^3 - 3px + 2q$, quorum summa nihilum adæquat.

Quod si radices duæ positivæ æquationis fuerint reales, & æquales, tunc earum inventio facilis erit. Sint etenim $x - a = 0$, & $x - a = 0$ æquationes simplices, quæ continent radices illas. Itaque si æquatio ex illarum multiplicatione orta $x^2 - 2ax + a^2 = 0$ multiplicetur per hanc aliam æquationem simplicem $x + 2a = 0$, quæ continet radicem negativam, fiet æquatio $x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$, quæ erit ejusdem formæ cum æquatione, de qua agitur, $x^3 - 3px + 2q = 0$. Unde, factâ mutuâ terminorum collatione, erit $3a^2 = 3p$, & $2a^3 = 2q$, hoc est $a^2 = p$, & $a^3 = q$. Unde dividendo partes istius ordine per partes illius, invenietur $a = \frac{q}{p}$; adeo, ut habebitur unaquæque radicum æqualium, si semissis quantitatis cognitæ, quæ constituit ultimum terminum, dividatur per trientem quantitatis cognitæ termini tertii.

Denique, si radices duæ positivæ æquatio-

tionis sint quidem reales, sed inæquales, tunc methodus eas eruendi procedere deberet in hunc modum. Sint $x - a - \sqrt{3b^2} = 0$, & $x - a + \sqrt{3b^2} = 0$ æquationes simplices, quæ continent radices illas, fingendo, quod a major sit, quàm $\sqrt{3b^2}$. Ergo, si æquatio, quæ ex illarum multiplicatione oritur, $x^2 - 2ax + a^2 - 3b^2 = 0$, multiplicetur per hanc aliam æquationem simplicem $x + 2a = 0$, quæ continet radicem negativam, orietur æquatio $x^3 - 3a^2x - 3b^2x + 2a^3 - 6ab^2 = 0$, quæ erit ejusdem formæ cum æquatione $x^3 - 3px + 2q = 0$. Quocirca conferendo terminos unius ordine cum terminis alterius, habebuntur duæ aliæ æquationes $3a^2 + 3b^2 = 3p$, & $2a^3 - 6ab^2 = 2q$.

Et quoniam in primâ istarum æquationum habetur $3a^2 + 3b^2 = 3p$, hoc est $a^2 + b^2 = p$, erit elevando utramque partem ad cubum $a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = p^3$. Et rursus, quia in secundâ habetur $2a^3 - 6ab^2 = 2q$, hoc est $a^3 - 3ab^2 = q$, erit elevando utramque partem ad quadratum $a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = q^2$. Jam verò duæ istæ æquationes nec additione, nec subductione mutuâ possunt nobis usui esse: nam primò additione

ne oritur æquatio $2a^6 - 3a^4b^2 + 12a^2b^4 + b^6 = q^2 + p^3$, ex qua nihil colligi potest, quum neutra pars ejus sit potestas perfecta; & secundò subductione unius ex alterâ producitur æquatio $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6 = p^3 - q^2$, quæ per extractionem quadratæ radicis fit quidem $3a^2b - b^3 = \sqrt{p^3 - q^2}$, sed combinari nulla ratione potest cum alterâ $a^3 - 3ab^2 = q$ ad inveniendam tum summam, cùm differentiám quantitatum a, & b. Deficit ergo in hoc casu methodus, quam in resolutione aliarum æquationum adhibuimus, & radices æquationes $x^3 - 3px + 2q = 0$, quum omnes sunt reales, & inæquales, ope ejus erui non possunt.

IV.

Resolutio quartæ formulæ
$x^3 - 3px - 2q = 0.$

TAndem ostendenda nobis est resolutio quartæ, & ultimæ formulæ $x^3 - 3px - 2q = 0$. Et quoniam in istâ æquatione duo termini, qui hinc inde existunt à termino deficiente, similiter signa habent contraria; radices, quas ipsi cum illo constituunt, poterunt hìc quoque

que esse reales, quales equidem si fuerint, una erit positiva, altera negativa. Quumque eadem æquatio, propter postremos duos terminos, qui eodem signo afficiuntur, aliam habeat radicem negativam; poterit æquatio ista tres radices reales habere, duas quidem negativas, & unam positivam. Et denique, quia deest in æquatione secundus terminus, ubi radicum omnium summa sub signo mutato debet reperiri; perspicuum est, radices duas negativas tales esse debere, ut summa ipsarum adæquet radicem positivam.

Sed hìc quoque monitum Lectorem velim, radices duas negativas æquationis hujus $x^3 - 3px - q = 0$ non semper esse reales, sed quandoq; posse imaginarias evadere. Si enim contingat, cubum ex triente quantitatis cognitæ tertii termini minorem esse quadrato, quod fit ex semisse quantitatis cognitæ, quæ ultimum terminum constituit, hoc est p^3 minorem, quàm q^2; tunc equidem radices duæ negativæ non erunt reales, sed imaginariæ. Itaque tunc demum æquatio, de qua agitur, omnes radices reales habebit, quotiescumque non fuerit p^3 minor, quàm q^2, sed vel major, vel æqualis. Nec silentio prætereundum,

quod quum p^3 eſt æqualis q^2, tunc radices duæ negativæ ſint quidem reales, ſed æquales, atque adeo commenſurabiles; ita, ut in hoc caſu æquationis reſolutio poſſit per regulas ſuperiùs traditas obtineri.

Jam, ut hæc omnia ſuis demonſtrationibus nota fiant, ac explorata, ſint $x + a + \sqrt{3b^2} = 0$, & $x + a - \sqrt{3b^2} = 0$ æquationes ſimplices, quæ continent radices duas negativas, ponendo, quod a minor ſit, quàm $\sqrt{3b^2}$. Itaque, quia ſumma iſtarum radicum eſt $-2a$, erit $x - 2a = 0$ æquatio ſimplex, quæ continet radicem poſitivam: proindeque, ſi tres iſtæ æquationes ſimplices multiplicentur inter ſe, æquatio, quæ inde oritur, $x^3 - 3a^2x - 3b^2x - 2a^3 + 6ab^2 = 0$ erit ejuſdem formæ cum æquatione, de qua agitur, $x^3 - 3px - 2q = 0$. Conferantur ergo termini unius ordine cum terminis alterius, & habebuntur ope hujus comparationis aliæ duæ æquationes, nimirum $3a^2 + 3b^2 = 3p$, & $2a^3 - 6ab^2 = 2q$.

Et quoniam in primâ iſtarum æquationum habetur $3a^2 + 3b^2 = 3p$, erit $a^2 + b^2 = p$; proindeque elevando utramque partem hujus æquationis ad cubum, erit

$a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = p^3$. Et rursus, quia in secundâ æquatione habetur $2a^3 - 6ab^2 = 2q$, erit $a^3 - 3ab^2 = q$: quare elevando utramque partem alterius hujus æquationis ad quadratum, habebitur $a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = q^2$. Unde si porrò partes hujus æquationis ordine subducantur ex partibus illius, orietur hæc altera $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6 = p^3 - q^2$, cujus quidem æquationis ope facile erit ostendere, radices duas negativas æquationis, de qua agitur $x^3 - 3px - 2q = 0$, esse reales, & inæquales, quum p^3 major est, quàm q^2; esse reales, & æquales, quum p^3 est æqualis q^2; & esse demum imaginarias, si fuerit p^3 minor, quàm q^2.

Radices namque duæ negativæ æquationis $x^3 - 3px - 2q = 0$ designatæ sunt per $-a - \sqrt{3b^2}$, & $-a + \sqrt{3b^2}$. Itaque, quum radices istæ sunt reales, & inæquales, erit $3b^2$ quantitas positiva, & minor quidem, quàm a^2: quod profectò quum contingit, positiva est etiam quantitas $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6$; & consequenter existente quoque positivâ quantitate $p^3 - q^2$, quæ illam adæquat, erit p^3 major, quàm q^2. At verò, quum radices illæ sunt reales, & æquales, nulla

erit quantitas $3b^2$; quod utique, quum accidit, nulla etiam erit quantitas $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6$; atque adeo evanescente quoque quantitate $p^3 - q^2$, fiet $p^3 = q^2$. Et denique, quum radices illæ sunt imaginariæ, eadem quantitas $3b^2$ erit negativa: unde, quum fiat negativa similiter quantitas $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6$, erit itidem negativa quantitas illi æqualis $p^3 - q^2$, & consequenter p^3 minor erit, quàm q^2.

Sed videamus modò, qua ratione inveniri possint radices æquationis $x^3 - 3px - 2q = 0$: qua in re, non secus, ac factum in tertiâ formulâ, singulos oportet casus prosequamur. Itaque, quum radices duæ negativæ sunt imaginariæ, sint $x + a + \sqrt{-3b^2} = 0$, & $x + a - \sqrt{-3b^2} = 0$ æquationes simplices, quæ continent radices illas. Ergo si duæ istæ æquationes multiplicentur inter se, & quæ inde oritur $x^2 + 2ax + a^2 + 3b^2 = 0$ multiplicetur per hanc aliam æquationem simplicem $x - 2a = 0$, quæ continet radicem realem positivam, orietur æquatio $x^3 - 3a^2x + 3b^2x - 2a^3 - 6ab^2 = 0$, quæ erit ejusdem formæ cum ipsa æquatione $x^3 - 3px - 2q = 0$. Quocirca si termini unius ordine comparen-

rentur cum terminis alterius, habebuntur aliæ duæ istæ æquationes $3a^2 - 3b^2 = 3p$, & $2a^3 + 6ab^2 = 2q$.

Quia igitur in primâ istarum æquationum habetur $3a^2 - 3b^2 = 3p$, hoc est $a^2 - b^2 = p$; erit elevando utramque partem ad cubum $a^6 - 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - b^6 = p^3$. Et rursus, quia in secundâ æquatione habetur $2a^3 + 6ab^2 = 2q$, hoc est $a^3 + 3ab^2 = q$; erit elevando utramque partem ad quadratum $a^6 + 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = q^2$. Unde si ex partibus istius ordine subducantur partes illius, erit $9a^4b^2 + 6a^2b^4 + b^6 = q^2 - p^3$, quæ per extractionem quadratæ radicis fiet $3a^2b + b^3 = \sqrt{q^2 - p^3}$. Sed habetur quoque $a^3 + 3ab^2 = q$. Itaque erit $a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3 = q + \sqrt{q^2 - p^3}$; & $a^3 + 3ab^2 - 3a^2b - b^3 = q - \sqrt{q^2 - p^3}$; atque adeo, quum per extractionem radicis cubicæ ex duabus istis æquationibus una fiat $a + b = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}$, altera $a - b = \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$, erit radix realis positiva æquationis designata per $2a = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$.

Atque hìc quoque nolim silentio prætterire, posse eandem radicem aliâ item ratione designari, nimirum si inventâ æquatione $a + b = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}$, per partes istius dividamus ordine partes alterius hujus æquationis $a^2 - b^2 = p$. Cæterùm si inventâ radice reali, desiderentur radices duæ imaginariæ, poterunt eæ inveniri, non modò determinando quantitatem b, verùm etiam dividendo æquationem ipsam $x^3 - 3px - 2q = 0$ per æquationem simplicem, inventam radicem continentem. Et siquidem radix ista vocetur c, ita ut æquatio, quæ subit munus divisoris, sit $x - c = 0$, erit quotiens prædictæ divisionis $x^2 + cx + c^2 - 3p = 0$; nam tametsi productâ usque ad hunc terminum divisione, videatur superesse $c^3 - 3pc - 2q$, attamen residuum istud zero, sive nihilum adæquare, exinde liquere potest, quia si in eo loco c substituatur valor ejus x, prodeunt termini æquationis $x^3 - 3px - 2q$, quorum summa est æqualis zero, sive nihilo.

Quod si radices duæ negativæ æquationis $x^3 - 3px - 2q = 0$ fuerint quidem reales, sed æquales inter se, tunc methodus eas eruendi hæc est. Sint $x + a = 0$, & x

& $x + a = 0$ æquationes simplices, quæ continent radices illas. Itaque si æquatio, ex harum multiplicatione orta, $x^2 + 2ax + a^2 = 0$ multiplicetur per hanc aliam æquationem simplicem $x - 2a = 0$, quæ continet radicem positivam, producetur æquatio $x^3 - 3a^2x - 2a^3 = 0$, quæ erit ejusdem formæ cum æquatione, de qua agitur, $x^3 - 3px - 2q = 0$. Quare factâ mutuâ terminorum comparatione, erit $3a^2 = 3p$, & $2a^3 = 2q$, hoc est $a^2 = p$, & $a^3 = q$: proindeque per mutuam istarum æquationum divisionem invenietur $a = \frac{q}{p}$: ex quo patet, quantitatem radicis negativæ inveniri, si quantitas cognita ultimi termini dimidiata dividatur per trientem quantitatis cognitæ termini tertii.

Denique, si radices duæ negativæ fuerint reales, & inæquales, tunc ad eas inveniendas sic methodus procedere deberet. Sint $x + a + \sqrt{3b^2} = 0$, & $x + a - \sqrt{3b^2} = 0$ æquationes simplices, quæ continent radices illas, ponendo nempe, quod $\sqrt{3b^2}$ minor sit, quàm a. Ergo si duæ istæ æquationes multiplicentur inter se, & quæ inde oritur $x^2 + 2ax + a^2 -$

 $3b^2$

$3b^2 = 0$ multiplicetur per hanc aliam æquationem simplicem $x - 2a = 0$, quæ continet radicem positivam, producetur æquatio $x^3 - 3a^2x - 3b^2x - 2a^3 + 6ab^2 = 0$, quæ erit ejusdem formæ cum ipsâ æquatione $x^3 - 3px - 2q = 0$. Unde comparando terminos unius ordinis cum terminis alterius, habebuntur duæ æquationes $3a^2 + 3b^2 = 3p$, & $2a^3 - 6ab^2 = 2q$.

Quia ergo in primâ istarum æquationum habetur $3a^2 + 3b^2 = 3p$, hoc est $a^2 + b^2 = p$, erit elevando utramque partem ad cubum $a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = p^3$. Et rursus quia in secundâ habetur $2a^3 - 6ab^2 = 2q$, hoc est $a^3 - 3ab^2 = q$, erit elevando utramque partem ad quadratum $a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = q^2$. Jam verò duæ istæ æquationes nec additione, nec subductione mutuâ usui nobis esse possũt; nã primò additione oritur æquatio $2a^6 - 3a^4b^2 + 12a^2b^4 + b^6 = q^2 + p^3$, ex qua nihil colligi potest, quum neutra pars ipsius sit potestas perfecta; & secundò subductione unius ex alterâ, producitur æquatio $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6 = p^3 - q^2$, quæ per extractionem quadratæ radicis evadit quidem $3a^2b - b^3 = \sqrt{p^3 - q^2}$, sed nulla ratione combinari

potest

poteſt cum alterâ $a^3 - 3ab^2 = q$ ad inveniendam tum ſummam, cùm differentiam quantitatum a, & b. Deficit ergo ſimiliter in hac formulâ, quum radices omnes ſunt reales, methodus in reſolutione aliarum æquationum adhibita, & radices illæ ope ejus erui non poſſunt.

V.

Caſus irreſolutus æquationum cubicarum pleniùs expenditur.

EX iis, quæ hactenus dicta ſunt de reſolutione æquationum tertii gradus, abundè liquet, in hiſce æquationibus duos caſus ſedulò diſtinguendos eſſe; primum, quum in iis una tantùm radix eſt realis, & aliæ duæ imaginariæ; alterum, quum omnes radices ſunt reales. Nam quum una tantùm radice reali gaudet æquatio (id, quod contingit, vel quum in æquatione una cum ſecundo termino deficit tertius, vel quum terminus tertius reperitur affectus ſigno +, vel denique quum afficitur ſigno —, ſed cubus ex triente ſui coefficientis minor eſt quadrato, quod fit ex ultimo termino dimidiato;) tunc radix illa poteſt ſemper in-

inveniri per methodum à nobis adhibitam. Sed quum in æquatione omnes radices, sunt reales: (id quod accidit, quum æquationis terminus tertius afficitur signo —, & cubus ex triente sui coefficientis major est quadrato ultimi termini dimidiato;) eo casu eadem illa methodus deficiens deprehenditur, nec ope ejus radices illæ possunt inveniri.

Qui resolutionem istarum æquationum tradiderunt, fingendo $x = y - z$, arbitrati sunt etiam in hoc secundo casu posse unam ex tribus radicibus perinde designari, ac designatur radix realis in casu primo: in quantum hac alterâ methodo inveniatur valor incognitæ x generaliter, ac indefinitè, hoc est absque eo, quod aliqua supponatur relatio inter cubum, qui fit ex triente quantitatis cognitæ tertii termini, & quadratum, quod fit ex ultimo termino dimidiato. Elevando etenim utramque partem hujus æquationis $x = y - z$ ad cubum, fit $x^3 = y^3 - 3y^2z + 3yz^3 = z^3$. Jam verò $-3y^2z + 3yz^2$ idem valet, ac $-3yzx$, ut patet si utraque pars ejusdem æquationis $x = y - z$ multiplicetur per $-3yz$. Itaque factâ debitâ substitutione, erit $x^3 = y^3 - 3yzx - z^3$, hoc est $x^3 + 3yzx$

$- y^3$

$- y^3 + z^3 = 0$; & propterea comparando terminos hujus æquationis ordine cum terminis æquationis $x^3 - 3px - 2q = 0$, habebuntur duæ aliæ æquationes $3yz = -3p$, & $y^3 - z^3 = 2q$.

Et quoniam in primâ istarum æquationum habetur $3yz = -3p$, hoc est $yz = -p$, erit elevando utramque partem ad cubum $y^3z^3 = -p^3$. Et rursus quia in secundâ habetur $y^3 - z^3 = 2q$, erit tum $y^6 - y^3z^3 = 2qy^3$, cùm $y^3z^3 - z^6 = 2qz^3$. Quare si in utraque istarum æquationum loco y^3z^3 ponatur valor ejus $-p^3$, una fiet $y^6 + p^3 = 2qy^3$, hoc est $y^6 - 2qy^3 + p^3 = 0$, altera $-p^3 - z^6 = 2qz^3$, hoc est $z^6 + 2qz^3 + p^3 = 0$. Quumque duæ istæ æquationes sint derivativæ secundi gradus, facilè erit eas resolvere per regulas superiùs traditas. Unde quia illas resolvendo, invenitur $y = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}$, & $z = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 - p^3}} = -\sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$, erit $x = y - z = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$: proindeque quantitas ista in omni casu designabit radicem unam æquationis $x^3 - 3px - 2q = 0$.

Non

Non dissimiliter rem ostenderunt in æquatione $x^3 - 3px + 2q = 0$. Sed multum abest, ut quantitas illa possit esse una ex radicibus æquationis $x^3 - 3px - 2q = 0$, quotiescumque radices omnes sunt reales. Quum enim hoc casu p^3 major esse debeat, quàm q^2, erit $q^2 - p^3$ quantitas negativa: atque adeo $\sqrt{q^2 - p^3}$ erit quantitas imaginaria: unde radix, quæ suâ naturâ realis esse debet, quantitatibus imaginariis exprimitur; proindeque non est vera ejus expressio. Falsum est igitur, quod resolvendo æquationes cubicas, fingendo $x = y - z$, methodus sit generalis, nec ullum casum excludat; nam etiam per hanc methodum earum tantùm æquationum cubicarum resolutio obtinetur, in quibus duæ ex radicibus sunt imaginariæ.

Qua autem ratione fiat, ut quum omnes æquationis cubicæ radices sunt reales, eæ erui non possint, fingendo $x = y - z$, exinde colligit Auctor Arithmeticæ Universalis, Londini æditæ anno 1707, qui creditur Vir summus Isaac Newtonus, quod quum radices illæ eodem modo se habeant ad terminos æquationis, & indifferenter per incognitam designentur, deberent utique omnes eadem lege erui, & ex-

& exprimi, qua una aliqua eruitur, & exprimitur. Unde quia tres omnes lege præfatâ exprimere, impossibile est, quum quantitas $y-z$, qua x designatur, multiplex esse nequeat; falsa erit hypothesis, quod x in casu, ubi triplex esse debet, sit æqualis $y-z$, & ex hypothesi impossibili conclusionem impossibilem colligi mirum esse non debet.

Quum primum in hanc Viri clarissimi rationem inciderim, illam ut alia ejusdem Auctoris inventa expansis ulnis excepi, & rem acu, ut dici solet, attigisse, mihi suasi. Sed quamquam ejus in hisce rebus auctoritas multò magis apud me valeat, quàm aliorum omnium simul, nunc tamen dicere non vereor, hìc nihil docuisse, quin potiùs à vero aberrasse. Nonne enim in reductione æquationum quarti gradus, aliâ methodo institutâ, quam primò docuimus, novimus, quantitatem determinandam per æquationem simplicem, quum multiplex esse debet, sic per analysim designari, ut prodeat adhuc indeterminata? Itaque quum hìc quoque quantitas $y-z$, qua x designatur, multiplex esse debeat, eam non impossibilem, sed indeterminatam exhibere deberet analysis.

Sed

Sed præterea, si conclusio idcirco sit impossibilis, quia colligitur ex hypothesi impossibili, erit vicissim possibilis conclusio illa, quæ eruitur ex hypothesi possibili. Hunc in finem ad inveniendas radices æquationis $x^3 - 3px - 2q = 0$ ubi omnes sunt reales, formetur rursus æquatio ejusdem naturæ $x^3 - 3a^2x - 3b^2x - 2a^3 + 6ab^2 = 0$, ponendo scilicet, quod $-a + \sqrt{3b^2}$ sit radix una negativa, & quod $-a - \sqrt{3b^2}$ sit radix altera similiter negativa, & $+2a$ radix tertia positiva. Itaque, factâ mutuâ terminorum collatione, invenietur, ut antea, $a^2 + b^2 = p$, & $a^3 - 3ab^2 = q$; ex quibus eruitur $a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = p^3$, & $a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = q^2$; atque adeo per mutuam istarum æquationum subductionem, habebitur $- 9a^4b^2 + 6a^2b^4 - b^6 = q^2 - p^3$.

Jam ex partibus istius æquationis, naturâ suâ negativis, eliciatur ope quantitatum imaginariarum radix quadrata. Itaque erit $\overline{3a^2b - b^3}\sqrt{-1} = \sqrt{q^2 - p^3}$. Unde, quum habeatur $a^3 - 3ab^2 = q$, habebitur per additionem $a^3 - 3ab^2 + \overline{3a^2b - b^3}\sqrt{-1} = q + \sqrt{q^2 - p^3}$, eritque per subtractionem $a^3 - 3ab^2$

$-3a^2b + b^3\sqrt{-1} = q - \sqrt{q^2 - p^3}$.
Quumque, per extractionem cubicæ radicis, istarum æquationum una fiat $a + b\sqrt{-1} = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}$, & altera $a - b\sqrt{-1} = \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$, erit radix realis positiva designata per $2a = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$, quæ quidem tametsi deducta sit ex hypothesi possibili, & naturæ æquationis conformi, quia tamen est illa eadem, quæ invenitur, fingendo $x = y - z$, adhuc iisdem difficultatibus subjacet.

Ex aliis ergo principiis impossibilitas hujus rei est deducenda, quæ quidem nec quisque investigavit adhuc, nec à nemine unquam investigari posse, facile mihi persuadeo. Non me latet, nonnullos non adeo deploratum casum existimasse; quia etsi radix illa realis sit expressa per latera cuborum, qui quantitatem continent imaginariam, fieri tamen potest, ut expressio realis evadat, nimirum, si latera illa extrahantur; quum sic quantitas imaginaria, velut contrariis signis in cubis illis affecta, evanescat, nec ampliùs occurrat: quem in finem eò vires omnes in-

intenderunt, ut qua ratione elici possit radix cubica, etiam ex binomiis imaginariis, ostenderent.

Sanè non irritum laborem istorum existimo, quin magnum eorum conatum summoperè suspicio. Sed id consequuti sunt, quod aliâ viâ potest obtineri; nam optatum finem sunt adepti tunc tantùm, quum una ex radicibus æquationis est realis simul, & rationalis. Nec equidem aliter res esse poterat. Quum enim binomia, ex quibus radices cubicæ sunt extrahendæ, unam contineant partem rationalem, alteram radicalem; tales quoque erunt radices cubicæ illorum binomiorum. Unde, quum in summâ istarum radicum se mutuò destruant partes radicales, in quibus latet quantitas imaginaria, remanebunt tantùm partes rationales, atque adeo summa tota commensurabilis erit.

Sed exemplo hoc ostendamus, simulque methodum indicemus, qua procedendum est analyticè in extractione radicum ex binomiis. Itaque, si æquatio fuerit $x^3 - 15x - 4 = 0$, erunt $2 + \sqrt{-121}$, & $2 - \sqrt{-121}$ binomia, ex quibus radices cubicæ sunt extrahendæ. Assumatur binomium $2 + \sqrt{-121}$, ejusque radix cu-

cubica repræsentetur per $a + \sqrt{-b}$. Quia ergo cubus istius est $a^3 - 3ab + \overline{3a^2 - b}\sqrt{-b}$, erit pars ejus rationalis $a^3 - 3ab = 2$, & pars radicalis $\overline{3a^2 - b}\sqrt{-b} = \sqrt{-121}$. Eleventur ad quadratum partes utriusque æquationis, & una fiet $a^6 - 6a^4b + 9a^2b^2 = 4$, altera $9a^4b - 6a^2b^2 + b^3 = 121$. Unde, quum additæ simul dent æquationem istam $a^6 + 3a^4b + 3a^2b^2 + b^3 = 125$, fiet hæc per extractionem radicis cubicæ $a^2 + b = 5$, ex qua eruitur $b = 5 - a^2$.

Jam in æquatione $a^3 - 3ab = 2$ ponatur loco b valor ejus $5 - a^2$. Fiet igitur $4a^3 - 15a = 2$, quæ reducetur ad hanc aliam $c^3 - 15c = 4$, siquidem divisis terminis omnibus per 4, multiplicentur, ad tollendas fractiones, radices ejus per 2. Et quoniam termini hujus æquationis $c^3 - 15c - 4 = 0$ evanescunt, si loco c ponatur 4; erit proinde $c = 4$; atque adeo, quum sit $2a = c$, erit $a = 2$, & consequenter b, cujus valor est $5 - a^2$, fiet æqualis unitati. Unde radix binomii $2 + \sqrt{-121}$, repræsentata per $a + \sqrt{-b}$, erit $2 + \sqrt{-1}$. Eâdem ratione radix alterius binomii $2 - \sqrt{-121}$, erit $2 - \sqrt{-1}$. Quocirca, quum summa

utriusque radicis sit 4, erit 4 radix æquationis propositæ $x^3 - 15x - 4 = 0$.

Hæc itaque est methodus, qua radices ex binomiis extrahuntur analyticè, & cujus ope expressio imaginaria mutatur in realem. Sed qui eam attentè perpendet, facilè percipiet mutationem istam tunc demum fieri posse, quum radix per quantitates imaginarias expressa est realis simul, & rationalis; quandoquidem æquatio, per quam determinanda est quantitas a, una ex partibus radicis extrahendæ, non modò est ejusdem formæ cum æquatione principali, verùm etiam relationem quandam habet ad illam. Unde qui per extractionem radicis cubicæ ex binomiis credunt difficultatem omnem superari, quæ deprehenditur in resolutione æquationum cubicarum, ii non satis rem perpendisse videntur. Quem in finem concludere licet, casum, quum omnes æquationis cubicæ radices sunt reales, esse omninò deploratum, nec intra cancellos calculi algebraici posse contineri.

Vi-

VI.

Vires Geometriæ in subsidium irresoluti casus accersuntur.

ETsi casus, quum omnes æquationis cubicæ radices sunt reales, sit omninò deploratus in Algebrâ; attamen si radices illæ per longitudines linearum sint designandæ, non deficiet nobis Geometria. Si enim oporteat, datum aliquem arcum trifariam partiri, invenietur in resolutione hujus problematis æquatio cubica, cujus omnes radices sunt reales. Unde vicissim, quotiescumque occurrit æquatio aliqua cubica, quæ radices omnes reales habeat, poterunt radices illæ per arcus cujusdam trisectionem geometricè designari.

Id autem ut liquidò constet, detur circulus ADE, cujus centrum sit punctum F; & assumptâ in ejus circumferentiâ portione quavis AB, oporteat illum in tres partes æquales dividere. Quod quæritur, ponatur jam factum, sintque AB, BC, CD partes quæsitæ. Ducantur radii AF, BF, CF, DF; & junctis chordis AB, BC, CD, agatur per punctum B re- Fig. 25.

cta BG, parallela ipsi CF, quæ conveniat cum chordâ arcus dati AD in puncto G; ponaturque radius dati circuli AF $= a$, chorda arcus similiter dati AD $= 2b$, & chorda arcus quæsiti AB $= x$.

Itaque, quia angulus BFD duplus est, tam anguli BAD, quàm anguli BFA, erit angulus BAD æqualis angulo BFA: proindeque triangula duo BFA, BHA æquiangula erunt; eritque adeo, ut AF ad AB, ita AB ad BH. Et quoniam propter parallelas BG, CF angulus GBF æqualis est angulo BFC, sive BFA; erit idem angulus GBF æqualis quoque angulo BAD: quare triangula duo ABH, BGH æquiangula erunt; & consequenter erit, ut AB ad BH; ita BH ad HG. Sunt ergo continuè proportionales quatuor rectæ lineæ AF, AB, BH, HG: proindeque quum sit AF $= a$, & AB $= x$, erit BH $= \frac{x^2}{a}$, & HG $= \frac{x^3}{a^2}$.

Ulteriùs, quum triangula duo BFA, BAH ostensa sint æquiangula, & trianguli BFA æqualia sint latera AF, BF; erunt quoque trianguli BAH æqualia latera AB, AH. Unde quum eâdem ratione æqua-

qualia sint etiam latera CD, DK trianguli CDK; erit AD unà cum GH æqualis tribus AB, BC, CD simul sumptis: proindeque, quia tres istæ inter se sunt æquales, erit AD unà cum GH tripla unius AB. Quare institutâ æqualitate inter valores istarum linearum, fiet $2b + \frac{x^3}{a^2} = 3x$ hoc est $2ba^2 + x^3 = 3a^2x$; quæ quidem æquatio quum ordinata sit $x^3 - 3a^2x + 2ba^2 = 0$, liquet eam esse ejusdem formæ cum æquatione $x^3 - 3px + 2q = 0$.

Jam autem, quod in istâ æquatione $x^3 - 3a^2x + 2ba^2 = 0$ radices omnes sint reales, facilè erit ostendere. Quum enim AD sit linea in circulo inscripta, ea diametro AL æqualis quidem esse potest, major autem esse non potest. Itaque prætermittendo casum æqualitatis, utpote specialem, AL major est, quàm AD: proindeque quum sit $AL = 2a$, & $AD = 2b$; erit $2a$ major, quàm $2b$; adeoque a major, quàm b. Est igitur in æquatione $x^3 - 3a^2x + 2ba^2 = 0$ cubus ex triente quantitatis cognitæ termini tertii major quadrato, quod fit ex ultimo termino dimidiato; & idcirco per ea, quæ superiùs

 osten-

etiam recta AI, quæ nec subtendit trientem arcus ABD, nec trientem arcus AND, id equidem non ita facilè quisque sibi in animum inducet, quia quam relationem habeat recta AI cum problemate de trisectione arcus AD, sanè non apparet. Id itaque, ne ullus Tyronibus nostris scrupulus maneat, oportet ostendamus; eoque magis, quod de hac re altum apud alios silentium reperitur.

Etsi enim Vir clarissimus Isaac Newtonus in Arithmetica suâ universali, aliud agens, hanc reddat rationem, cur quærendo quintam partem arcus APB inveniatur æquatio quinque dimensionum, cujus quinque sunt radices: nimirum quia quamvis animum fortè advertas tantùm ad arcum APB; tamen æquatio, qua quæstio solvetur, determinabit quintam partem arcuum omnium, qui terminantur ad puncta A, & B, nempe quintam partem arcuum ASB, APBSAPB, ASBPASB, & APBSAPBSAPB, æquè ac quintam partem arcus APB. Nihilominus facilè videre est, rationem istam, prout à Viro Clarissimo affertur, rem in propatulo non ponere, quin etiam falsitatis posse redargui; quia scilicet arcus, qui terminantur ad puncta A, & B, vel

Fig. 27.

ſunt duo tantùm, vel etiam numero infiniti.

Itaque, ut genuinam hujus rei rationem intelligamus, methodum oportet conſideremus, per quam procedimus in reſolutione problematis, in quo arcus inter duo data puncta interceptus in certum æqualium partium numerum dividendus proponitur. Nimirum, quum in reſolutione prædicti problematis procedamus, inveniendo valorem chordæ, quæ unam ex iis partibus ſubtendit; perſpicuum eſt, problema ipſum eò quidem redire, ut inveniatur valor rectæ lineæ, quæ incipiendo ab uno puncto, toties poſſit in circuli circumferentiâ applicari, donec perveniatur ad punctum alterum, quot ſunt partes, in quas dividere oportet arcum, qui inter duo illa puncta intercipitur.

Atque hac ratione facile modò intelligimus, cur æquatio $x^3 - 3a^2x + 2ba^2 = 0$ tres habeat radices reales, deſignatas per rectas AB, AN, AI. Orta eſt namque æquatio illa ex reſolutione problematis, in quo arcus interceptus inter puncta A, & D in tres partes æquales proponitur dividendus. Itaque, ut illi æquationi ſatisfiat, rectam lineam oportet in-

FIG. 26.

invenire, quæ à puncto A ter possit aptari in circumferentia circuli, donec ad punctum alterum D perveniatur. Jam verò unaquæque rectarum AB, AN, AI quæsiti conditiones adimplet; nam siquidem extendatur DF ad E, & fuerit EQ tertia pars arcus AE, æquales erunt rectæ lineæ AI, IQ, QD æquè, ac æquaquales sunt, tam rectæ AB, BC, CD, quàm rectæ AN, NM, MD. Quare valor incognitæ x in æquatione $x^3 - 3a^2x + 2ba^2 = 0$ erit unaquæque rectarum AB, AN, AI.

Porrò, quod in eadem æquatione rectæ AB, AN sint valores radicum positivarum, & recta AI sit valor radicis negativæ; id equidem facilè constabit, si ostendamus rectam AI ipsis AB, AN simul sumptis æqualem esse. Deest enim in æquatione secundus terminus; adeoque radix negativa talis esse debet, ut adæquet summam radicum positivarum. Id autem ostendemus, præmisso priùs hoc lemmate: nempe quod si in circulo aliquo ABC describatur triangulum æquilaterum BCD, & ex uno trianguli angulo, veluti C, ducatur recta linea CA, quæ terminata ad circuli circumferentiam secet latus oppositum BD in puncto E, quod in- Fig. 28.

inquam recta ista CA ipsis AB, AD simul sumptis sit æqualis.

Hujus lemmatis veritas ostendi poterit in hunc modum. Angulus DAC, velut æqualis angulo DBC, æqualis est etiam angulo BDC. Itaque duo triangula CDE, CAD æquiangula erunt; adeoque erit, ut CD ad DE, ita CA ad AD. Eadem ratione angulus BAC, velut æqualis angulo BDC, æqualis est etiam angulo DBC. Itaque duo triangula CBE, CAB æquiangula erunt; adeoque erit, ut CB, ad BE, ita CA ad AB. Et quoniam CD est ad DE, ut CA ad AD; & CB, sive CD est ad BE, ut CA ad AB: erit ut CD ad summam ipsarum DE, BE, ita CA ad summam ipsarum AD, AB. Unde quemadmodum CD ipsis DE, BE simul sumptis est æqualis, ita CA ipsas AD, AB simul acceptas adæquabit.

Hoc lemmate præmisso, facile nunc erit, ostendere rectam AI ipsis AB, AN simul sumptis æqualem esse. Quum enim arcus AB sit tertia pars arcus ABD, & arcus AN sit tertia pars arcus AND; erit arcus BAN tertia pars totius circumferentiæ. Et quoniam arcus BD continet duas tertias partes arcus ABD, & arcus DI continet similiter duas tertias partes

FIG. 26.

ar-

arcus DIL; continebit arcus BDI duas tertias partes ſemicircumferentiæ ADL; proindeque tertia pars erit totius circumferentiæ. Æquales ergo ſunt arcus BAN, BDI, IMN. Itaque ſi puncta B, I, N tribus rectis lineis jungantur, triangulum ſub iis comphehenſum æquilaterum erit; & conſequenter per oſtenſum lemma recta AI ipſis AB, AN ſimul ſumptis æqualis erit.

Jam igitur, quum in problemate de triſectione arcus AD inveniatur æquatio $x^3 - 3a^2x + 2a^2b = 0$, cujus omnes radices ſunt reales, & valores iſtarum radicum deſignentur per rectas AB, AN, AI; haud difficile modò erit intelligere, qua ratione per triſectionem alicujus arcus poſſint geometricè deſignari radices cujuſcumque æquationis cubicæ, quotieſcumque iſtæ omnes ſunt reales. Aſſumatur enim æquatio generalis $x^3 - 3px + 2q = 0$. Et quia comparando terminos iſtius ordine cum terminis illius, invenitur $\sqrt{p} = a$, & $\frac{2q}{p} = 2b$; perſpicuum eſt, quod ſi deſcribatur circulus ABL, cujus ſemidiameter ſit $\sqrt{p}$, & in eo

ap-

applicetur recta linea $AD = \frac{2q}{p}$, valores radicum positivarum sint rectæ lineæ AB, AN, quæ subtendunt trientes arcuum ABD, AND, valor autem radicis negativæ sit recta linea AI, quæ subtendit trientem arcus ABDNABD.

Quod si autem æquatio fuerit $x^3 - 3px - 2q = 0$, in qua duæ sunt radices negativæ, & una positiva; tunc iisdem peractis, designabunt rectæ AB, AN valores radicum negativarum, & erit recta AI valor radicis positivæ. In omni enim æquatione, si terminorum locis paribus existentium signa mutentur, radices positivæ fient negativæ, & vicissim negativæ evadent positivæ. Itaque quia in æquatione $x^3 - 3px - 2q = 0$ mutatis signis terminorum locis paribus existentium, habetur loco ejus hæc alia $x^3 - 3px + 2q = 0$, radices istarum æquationum sibi ipsis ex contraria parte correspondent, hoc est negativæ unius erunt positivæ alterius, & vicissim, positiva unius erit alterius negativa. Unde, quia æquationis $x^3 - 3px + 2q = 0$ radices duæ positivæ designantur per rectas AB, AN, & radix negativa designatur per re-

ctam

ctam AI; erunt eædem rectæ AB, AN valores radicum negativarum æquationis $x^3 - 3px - 2q = 0$, & recta AI valor radicis positivæ ejusdem æquationis.

VII.

Methodus vulgata resolvendi æquationes cubicas ostenditur.

IN resolutione æquationum cubicarum aliam solet methodum vulgus Algebristarum adhibere, quam quidem visum est hoc loco subjungere, simulque ejus artificium paulò clariùs, quàm ab aliis factum est, aperire, ne eam Lectores nostri ignorarent; eòque magis, quod quum primùm Algebristæ resolutionem æquationum cubicarum sunt aggressi, non aliam, quàm istam methodum usurpaverint. Ostendemus itaque primùm, quo artificio in hanc methodum inciderint, & quibus principiis insistentes eam excogitaverint. Quumque ejus inventio synthesi potiùs, quàm analysi debeatur, ostendemus quoque, qua ratione eadem methodus analyticè possit inquiri.

Ut ergo ab ovo, ut dici solet, rem ordiamur, primi Algebræ promotores, qui

qui Arabes fuerunt, difficultatem, quæ in resolvendis æquationibus secundi gradus occurrit, non aliunde norunt oriri, quàm quia secundus terminus adest in iis. Itaque quia per compositionem quadrati, ostensam ab Euclide in suis Elementis, facilè fuit eis secundum terminum ab istis æquationibus tollere, difficultatem omnem removerunt, & æquationum secundi gradus resolutionem feliciter tradidere. Sed quum deinde ad æquationes cubicas, sive trium dimensionum gradum fecerint, difficultatem hìc majorem esse deprehenderunt, ob duos terminos, qui impedimento sunt resolutioni istarum æquationum: proindeque non ausi fuerunt ulteriùs progredi.

Quum primum Itali Algebræ studio operam dederint, quia norunt in æquationibus secundi gradus nihil ampliùs posse desiderari, in id statim vires suas intenderunt, ut ostenderent, qua ratione resolutio æquationum tertii gradus posset obtineri. Nodum difficultatis & ipsi etiam sunt experti. Sed quum pro comperto habuerint, Arabes resolutionem æquationum secundi gradus obtinuisse, propter cognitam quadrati compositionem; crediderunt posse ipsos resolutionem

nem æquationum cubicarum consequi, si utique cubi compositionem exploratam haberent. Hanc ergo inquirentes, deprehenderunt, quod sicuti quadratum ex duabus partibus componitur ex quadratis partium, duploque ejus, quod mutuâ partium multiplicatione producitur; ita cubus ex duabus partibus constet ex cubis istarum partium, triplo ejus, quod oritur, multiplicando quadratum primæ partis per secundam, & triplo ejus, quod producitur, multiplicando quadratum secundæ per primam.

Cognitâ cubi compositione, nec id, quod erat in votis, statim sunt assecuti. Nam ope ejus non aliud primâ facie visum est eis posse obtineri, quàm, ut secundus tantùm terminus ex æquationibus cubicis tolleretur. Manebat itaque terminus tertius, qui non minùs resolutioni æquationum cubicarum obstabat solitarius, quàm si cum secundo jungeretur. Unde in re adeo arduâ parum, aut nihil progressos fuisse, ipsimet norunt. Hoc utique per cognitam cubi compositionem saltem effectum crediderunt, quod quum ope ejus facilè esset, secundum terminum ex æquationibus cubicis tollere; difficultates, quæ ascendunt ad cubum,

bum, ad pauciora, ut ipsi loquebantur, capitula possent revocari, nimirum ad eas tantùm formulas, in quibus secundus terminus deest: quod deinde non parum adjumenti eis fuit in inveniendâ resolutione æquationum cubicarum.

Quum enim ea tantùm capitula examinanda susceperint, quæ constant ex cubo, rebus, & numero, hoc est, quæ primum, tertium, & quartum terminum habent; norunt eò quidem totum negotium redigi, ut ex istis capitulis ita quidem tollendus esset tertius terminus, ut secundus jam deficiens rursus non occurreret. Itaque, quum cubi compositionem paulò diligentiùs fuissent contemplati, observarunt in eâ ter occurrere, tum productum, quod oritur multiplicando quadratum primæ partis per secundam, cùm productum, quod gignitur multiplicando quadratum secundæ partis per primam. Unde miro quidem conatu id, quod quærebant, obtineri posse deprehenderunt, si loco incognitæ, in æquatione contentæ, substituatur incognita altera, aucta, vel diminuta quotiente, qui oritur, dividendo trientem quantitatis cognitæ tertii termini per hanc aliam incognitam.

Verum quidem est, hoc artificio non illi-

illicò oriri æquationem cubicam, quæ secundo, & tertio termino carens, cubum tantùm, & numerum contineat; quia ea, in quam transformatur æquatio principalis, tantùm abest, ut constet cubo tantùm, & numero, ut neque etiam cubica dici possit, utpotè quæ ad sex dimensiones ascendit. Sed nihilominus, quia æquatio ista sic ad sex dimensiones attollitur, ut tamen naturâ suâ dicenda sit derivativa secundi gradus; facilè fuit eis, hac mediante, illam, quam propriè quærebant, obtinere; nimirum resolvendo æquationem inventam iisdem fermè regulis, quibus æquationes secundi gradus resolvuntur. Hac igitur methodo tradiderunt Itali resolutionem æquationum cubicarum, quam clarioris intelligentiæ ergo uno, aut altero exemplo nunc illustrabimus.

Proponatur resolvenda æquatio cubica $x^3 + 3px - 2q = 0$. Assumatur loco x incognita alia y, diminuta quotiente, qui oritur, dividendo p per y; ita nempe, ut habeatur $x = y - \frac{p}{y}$. Fiant debitæ substitutiones, & loco propositæ æqua-

tionis habebitur hæc alia $y^3 - \frac{p^3}{y^3} - 2q = 0$, hoc est $y^6 - 2qy^3 = p^3$, quæ tametsi ad sex dimensiones ascendat, est tamen derivativa secundi gradus. Addatur ad utramque partem hujus æquationis quadratum ex q, & erit $y^6 - 2qy^3 + q^2 = q^2 + p^3$, quæ per extractionem quadratæ radicis fiet $y^3 - q = \sqrt{q^2 + p^3}$, hoc est $y^3 = q + \sqrt{q^2 + p^3}$. Denique ex utraque parte hujus æquationis extrahatur radix cubica, & habebitur $y = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 + p^3}}$: unde substituto in æquatione simplici $x = y - \frac{p}{y}$ loco y valore isto, invenietur valor incognitæ x.

Proponatur ulteriùs resolvenda æquatio $x^3 - 3px - 2q = 0$. Assumatur loco x incognita alia y aucta quotiente, qui oritur, dividendo p per y, ita nempe, ut habeatur $x = y + \frac{p}{y}$; & debitâ substitutione peractâ, loco propositæ æquationis

ha-

habebitur hæc alia $y^3 + \frac{p^3}{y^3} - 2q = 0$, hoc est $y^6 - 2qy^3 = -p^3$, quæ ita quidem ascendit ad sex dimensiones, ut tamen dicenda sit derivativa secundi gradus. Ad utramque partem hujus æquationis addatur quadratum ex q, eritque $y^6 - 2qy^3 + q^2 = q^2 - p^3$, quæ per extractionem quadratæ radicis fiet $y^3 - q = \sqrt{q^2 - p^3}$, hoc est $y^3 = q + \sqrt{q^2 - p^3}$. Denique extrahatur ex utraque parte hujus æquationis radix cubica, & erit $y = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}$: proindeque substituendo in æquatione simplici $x = y + \frac{p}{y}$ loco y valorem istum, invenietur valor incognitæ x.

Sed videamus modò, qua ratione hæc methodus resolvendi æquationes cubicas, quæ secundo termino carent, possit analysis ope reperiri. Et quoniam eò res tota reducitur, ut inveniatur quantitas, per quam sic transformanda est æquatio cubica, ut non modò secundo, verùm etiam tertio termino deficiens oriatur; inveniemus analyticè traditæ methodi

artificium, si utique quantitatem illam assumamus indeterminatè. Sit igitur $x^3 - 3px - 2q = 0$ æquatio proposita. Itaque faciendo $x = y + a$, erit $x^3 = y^3 + 3ay^2 + 3a^2y + a^3$: proindeque, ut transformatione oriatur æquatio, secundo, & tertio termino carens, necesse est, ut duo termini $3ay^2 + 3a^2y$ tantundem valeant, ac tertius terminus æquationis $3px$.

Instituatur ergo æquatio inter $3ay^2 + 3a^2y$, & $3px$, eritque $3ay^2 + 3a^2y = 3px$, hoc est $ay^2 + a^2y = px$. Et quoniam ex hypothesi habetur $y + a = x$, multiplicando terminos omnes per ay, erit $ay^2 + a^2y = ayx$. Unde erit $ayx = px$, hoc est $ay = p$; adeoque divisâ utrâque parte hujus æquationis per y, fiet $a = \frac{p}{y}$. Est igitur quantitas a æqualis quotienti, qui oritur, dividendo p per y. Quocirca ad transformandam æquationem $x^3 - 3px - 2q = 0$ eâ quidem lege, ut alia loco ejus oriatur, quæ secundo, & tertio termino careat; necesse est loco incognitæ x aliam substituere, auctam quotiente, qui oritur, dividendo trientem quantitatis cognitæ tertii termini per hanc aliam incognitam.

Eâ-

Eadem ratione ostendetur, quod ad transformandam æquationem $x^3 + 3px - 2q = 0$ eâ lege, ut alia loco ejus habeatur secundo, & tertio termino carens, substituenda sit loco incognitæ x incognita alia, diminuta quotiente, qui oritur, dividendo trientem quantitatis cognitæ tertii termini per hanc aliam incognitam. Etenim si ponatur $x = y + a$, erit rursus $x^3 = y^3 + 3ay^2 + 3a^2y + a^3$, adeoque ut transformatione oriatur æquatio, quæ secundo, & tertio termino careat, necesse est, ut duo termini $3ay^2 + 3a^2y$ destruantur per tertium terminum æquationis $3px$. Est ergo $3ay^2 + 3a^2y + 3px = 0$, hoc est $ay^2 + a^2y = -px$. Jam verò, quum habeatur ex hypothesi $y + a = x$, multiplicando terminos omnes per ay, fiet $ay^2 + a^2y = ayx$. Erit igitur $ayx = -px$: unde infertur $a =$

$$-\frac{p}{y}.$$

Atque ita jam id omne mihi videor tradidisse, quod ad resolutionem spectat æquationum cubicarum; nec vereor dicere, multò plura hìc reperiri, multòque clariùs nonnulla explicari, quàm apud alios factum invenies. Ostendendus

esset modò usus quatuor illarum formularum in resolutione æquationum specialium; sed quum res perinde peragi debeat, ac fieri diximus in resolutione æquationum specialium secundi gradus, id per exempla ostendere, superfluum existimamus. Itaque ad resolutionem æquationum quatuor dimensionum gradum nunc facimus, quam subinde etiam ostendere conabimur, ut omnia Lector habeat, quæ ad eam pertinere videntur.

CAP. VIII.

De resolutione æquationum quarti gradus.

ÆQuationes, quarum sedes in quarto gradu subsistit, in duas classes distinguimus. Quædam enim sunt talis naturæ, ut affectionem cubicam contineant; aliæ vicissim ejusmodi sunt, ut ab affectione cubicâ sint immunes. Dicimus æquationem quarti gradus affectionem cubicam continere, quotiescumque in radicibus ejus radicales cubicæ continentur; dicimus verò eandem æquationem immunem esse à cubicâ affectione, quum radices ejus non cubicas, sed qua-

quadratas radicales comprehendunt.

Id ut clariùs intelligatur, juvabit in antecessum advertere, radices æquationum quarti gradus, quum istæ resolvuntur, sic expressas oriri, ut una ipsarum parte contineant semper radicem quadratam, ex multinomio aliquo extrahendam. Itaque si multinomium istud radicales contineat cubicas, tunc æquatio quarti gradus dicetur similiter affectionem cubicam continere; quod si verò multinomium illud contineat tantùm radicales quadratas; eo casu æquatio quarti gradus ab affectione cubicâ immunis esse dicetur.

Hanc distinctionem ponimus in æquationibus quarti gradus, ut rectè intelligatur natura problematum, ad quæ æquationes illæ referuntur. Unumquodque etenim problema, cujus æquatio naturâ suâ ad quartum gradum ascendit, quarti gradus esse dicetur. Sed interim si æquatio immunis fuerit ab affectione cubicâ, poterit illud velut problema secundi gradus haberi; quod si verò affectionem cubicam contineat, tamquam problema tertii gradus poterit considerari.

Æquationes quarti gradus ab affectione cubicâ sunt semper immunes, quoties-

cumq; primum tantùm, & ultimum terminum habent, hoc est quum non affectæ, sed puræ deprehenduntur. Hujusmodi æquationes, vel reducuntur ad hanc formam $x^4 - q = 0$, vel etiam ad hanc aliam $x^4 + q = 0$. Prioris formæ æquationes duas habent radices reales, & alias duas imaginarias, estque ex radicibus realibus una quidem positiva, altera negativa. Æquationes verò alterius formæ omnes radices imaginarias habent. Sed in utriusque formæ æquationibus inveniuntur radices istæ, extrahendo bis radicem quadratam.

Si enim habeatur $x^4 - q = 0$, hoc est $x^4 = q$; per unam quadratæ radicis extractionem, orientur duæ istæ æquationes secundi gradus $x^2 = +\sqrt{q}$, & $x^2 = -\sqrt{q}$. Quare extrahendo rursus ex utraque istarum quadratam radicem, fiet $x = +\sqrt{+\sqrt{q}}$, $x = -\sqrt{+\sqrt{q}}$, $x = +\sqrt{-\sqrt{q}}$, & $x = -\sqrt{-\sqrt{q}}$: proindeque radices quatuor æquationis $x^4 - q = 0$ erunt $+\sqrt{+\sqrt{q}}$, $-\sqrt{+\sqrt{q}}$, $+\sqrt{-\sqrt{q}}$, & $-\sqrt{-\sqrt{q}}$, ex quibus liquet duas priores esse reales, earumque unam positivam, alteram negativam, alias verò duas imaginarias esse.

Similiter si habeatur $x^4 + q = 0$, hoc

est

est $x^4 = -q$; per unam quadratæ radicis extractionem orientur duæ istæ æquationes secundi gradus $x^2 = +\sqrt{-q}$, & $x^2 = -\sqrt{-q}$. Unde si rursus ex utraque istarum quadrata radix extrahatur, habebuntur quatuor æquationes simplices $x = +\sqrt{+\sqrt{-q}}$, $x = -\sqrt{+\sqrt{-q}}$, $x = +\sqrt{-\sqrt{-q}}$, & $x = -\sqrt{-\sqrt{-q}}$: proindeque radices quatuor æquationis $x^4 + q = 0$ erunt $+\sqrt{+\sqrt{-q}}$, $-\sqrt{+\sqrt{-q}}$, $+\sqrt{-\sqrt{-q}}$, & $-\sqrt{-\sqrt{-q}}$, quas omnes liquet imaginarias esse.

Ab affectione cubicâ immunes quoque sunt semper æquationes quarti gradus, in quibus tum secundus, cùm quartus terminus deficit, quæque nullâ habitâ signorum ratione sub hac formulâ generali $x^4 + 2px^2 + q = 0$ possunt comprehendi. Sunt namque hujusmodi æquationes derivativæ secundi gradus; adeoque valores ipsarum inveniuntur, extrahendo radicem quadratam ex valoribus æquationum secundi gradus, ex quibus derivantur.

Ex eo autem, quod æquationes quarti gradus, comprehensæ sub hac formulâ $x^4 + 2px^2 + q = 0$, deriventur ex æquationibus

bus secundi gradus, per hanc formulam designatis $y^2 + 2py + q = 0$; cognitâ istarum naturâ, facile erit naturam quoque illarum investigare. Si enim radices duæ æquationis $y^2 + 2py + q = 0$ sint reales, & positivæ; erunt radices quatuor æquationis $x^4 + 2px^2 + q = 0$ similiter reales, sed duæ positivæ, & duæ negativæ. Quod si verò radices duæ æquationis $y^2 + 2py + q = 0$, sint quidem reales, sed una positiva, altera negativa; tunc ex radicibus quatuor æquationis $x^4 + 2px^2 + q = 0$ duæ erunt reales, & duæ imaginariæ, eritque ex realibus una positiva, altera negativa. Et denique si radices duæ æquationis $y^2 + 2py + q = 0$ vel sint negativæ, vel imaginariæ; eo casu radices quatuor æquationis $x^4 + 2px^2 + q = 0$ omnes imaginariæ erunt.

Itaque eæ solæ æquationes quarti gradus possunt cubicam affectionem continere, in quibus adest, vel secundus terminus, vel quartus, vel etiam uterque. Quando autem id contingat, ipsa hujusmodi æquationes resolvendi ratio nobis ostendet, quæ etiam indicabit, num æquatio quarti gradus dividi possit in duas alias secundi gradus, necne. Et quoniam resolvuntur æquationes istæ secundi gradus,

dus, alias ex iis derivando, quæ ſint trium tantùm dimenſionum: proinde id primum oſtendendum nobis erit, quâ ratione ex æquationibus quarti gradus poſſint aliæ trium tantùm dimenſionum derivari: qua in re ſupponemus, ſublatum eſſe ex æquationibus quarti gradus terminum ſecundum, quia id, regulâ ſatis expeditâ, fieri ſemper poſſe, jam ſuperiùs vidimus.

I.

Æquationum cubicarum ex æquationibus quarti gradus derivatio oſtenditur.

Etſi æquationes quarti gradus, quas hìc examinandas nobis proponimus, in propriâ ſuâ ſede exiſtant, nec proinde in alias ſimpliciores dividi poſſint; nihil tamen vetat, quominus eas quoque conſideremus, velut compoſitas ex multiplicatione mutuâ duarum ſecundi gradus æquationum. Omnis etenim æquatio conſtituitur per multiplicationem mutuam æquationum ſimplicium, quæ ſuas continent radices. Itaque, quia æquatio quarti gradus quatuor habet radices, æquationes quatuor ſimplices, in quibus radices illæ continentur, mul-

multiplicatæ simul dabunt æquationem quarti gradus; & propterea quum duæ ex iis æquationibus componant æquationem, ubi incognita est duarum dimensionum, poterit & ipsa æquatio quarti gradus, velut orta ex duarum secundi gradus æquationum multiplicatione considerari.

Neque verò considerando æquationem quarti gradus, quæ sit in propriâ suâ sede, velut genitam ex multiplicatione mutuâ duarum secundi gradus, sequitur ipsam revera in duas alias secundi gradus divisibilem esse. Sic enim dicendum esset, eandem æquationem quarti gradus dividi posse in quatuor æquationes simplices, quum constituatur per multiplicationem mutuam æquationum simplicium, quæ suas continent radices. Itaque quemadmodum hoc postremum dici nequit, quia quatuor illæ æquationes apparenter tantùm sunt simplices, reverà autem illarum unaquæq; ipsam æquationem quarti gradus nobis restituit; ita neque etiam primum rectè infertur, quia quælibet ex iis æquationibus secundi gradus apparenter tantùm est duarum dimensionum, reverà autem sedes ejus in quarto gradu subsistit.

Et

Et sanè non aliâ de causâ in definiendis æquationibus, quæ in propriâ suâ sede existunt, discessimus à vulgo Algebristarum, qui pro talibus solent habere æquationes illas, quæ in alias simpliciores dividi nequeunt, quàm quia non satis res definita nobis videbatur. Si enim hoc criterio uti velimus, jam nulla æquatio, quæ sit plurium dimensionum, existet in propriâ suâ sede, quia dividi saltem potest in æquationes simplices, quæ suas continent radices. Quod si reponas, æquationes istas apparenter tantùm esse simplices, reverà tamen esse æquè compositas, ac æquationem ipsam, quam componunt. Jam ad id cognoscendum novum cogeris criterium proferre. Dicamus itaque, eas tantùm æquationes existere in propriâ suâ sede, quæ non modò per multiplicationem mutuam æquationum simplicium, in quibus earum radices continentur, verùm etiam per unicam tantùm illarum æquationum constitui possunt; & hac ratione res satis definietur, nec opus erit aliud quidpiam adjicere.

Jam considerando eas quoque æquationes quarti gradus, quæ in propriâ suâ sede existunt, veluti ortas ex multiplica-

tione mutuâ duarum secundi gradus æquationum, haud difficile erit ex iis æquationes cubicas, quas optamus, derivare. Assumantur enim indeterminatè æquationes duæ secundi gradus, quæ per mutuam multiplicationem producunt æquationem quarti gradus, de qua agitur. Et jam, quum æquatio ex illarum multiplicatione orta debeat esse ejusdem naturæ cum æquatione propositâ, comparentur termini unius ordine cum terminis alterius: qua institutâ comparatione, invenientur totidem æquationes, quot in æquationibus componentibus quantitates indeterminatæ fuerunt assumptæ. Unde si ex iis æquationibus alia eruatur, in qua ea sola maneat quantitas indeterminata, quæ est coefficiens secundi termini in utraque æquationum componentium, ascendet illa ad tres dimensiones, adeoque erit æquatio cubica quæsita.

Id ut ostendamus, sit $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ æquatio quarti gradus, ex qua eruenda est alia cubica. Eam autem indeterminatam assumimus, ut possit omnes quarti gradus æquationes repræsentare. Sint porrò $x^2 + yx + a = 0$, & $x^2 - yx + b = 0$ æquationes duæ secundi gradus, quæ multiplicatione mutuâ

tuâ illam producunt. Atque has taliter etiam accipimus, ut secundus terminus sit idem in utraque, sed contrariis signis affectus, quò æquatio, quam componunt, secundo termino deficiens oriatur. Et quoniam æquatio quarti gradus, quæ producitur per mutuam multiplicationem æquationum $x^2 + yx + a = 0$, & $x^2 - yx + b = 0$, est $x^4 + ax^2 + bx^2 - y^2x^2 - ayx + byx + ab = 0$; erit ista ejusdem naturæ cum æquatione propositâ $x^4 + px^2 + qx + r = 0$. Unde comparando terminos unius ordine cum terminis alterius, habebuntur comparatione istâ tres aliæ æquationes $a + b - y^2 = p$, $by - ay = q$, & $ab = r$.

Nunc ex istis æquationibus alia est deducenda, in qua non alia occurrat quantitas indeterminata, quàm y, quæ est coefficiens secundi termini in utraque æquationum componentium. Id autem obtineri potest in hunc modum. Quoniam in primâ æquatione habetur $a + b - y^2 = p$, erit transponendo $a + b = p + y^2$, atque adeo multiplicando terminos omnes per y, erit $ay + by = py + y^3$. Jam verò habetur in secundâ $by - ay = q$. Itaque erit per additionem $2by = py + y^3 + q$, & per subtractionem $2ay = py + y^3$

$+ y^3 - q$: proindeq; multiplicando simul duas istas æquationes, fiet $4aby^2 = p^2y^2 + 2py^4 + y^6 - q^2$. Est autem in tertiâ æquatione $ab = r$, hoc est $4aby^2 = 4ry^2$. Quare erit $4ry^2 = p^2y^2 + 2py^4 + y^6 - q^2$, hoc est $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - q^2 = 0$, in qua non alia occurrit quantitas indeterminata, quàm y. Et quamquam æquatio ista ad sex dimensiones ascendat, quia tamen numeri dimensionum, quas in singulis terminis habet incognita, dividi possunt per binarium, poterit velut æquatio trium tantùm dimensionum haberi.

Hæc igitur est æquatio cubica, quæ derivatur ex æquatione propositâ $x^4 + px^2 + qx + r = 0$. Et quoniam ista generalis est; omnesque quarti gradus æquationes, quæ secundo termino carent, potest repræsentare, satis erit in inventâ æquatione cubicâ loco p, q, & r correspondentes valores substituere, quum aliqua specialis æquatio proponitur. Ita si fuerit æquatio $x^4 - 3x^2 + 2x - 8 = 0$, quia hic p est $- 3$, q est $+ 2$, & r idem valet, ac $- 8$, æquatio cubica æquationi huic correspondens erit $y^6 - 6y^4 + 41y^2 - 4 = 0$. Et similiter, si æquatio fuerit $x^4 + 2x^2 - 5x + 6 = 0$, quia p est $+ 2$, q est

$- 5$

-5, & r eſt $+6$, invenietur pro ipſius æquatione cubicâ $y^6 + 4y^4 - 20y^2 - 25 = 0$. Atque ita quoque, ſi proponatur æquatio $x^4 - a^2x^2 + abcx + a^2bc = 0$, quia p eſt $-a^2$, q eſt $+abc$, & r eſt $+a^2bc$, habebitur pro ejus æquatione cubicâ $y^6 - 2a^2y^4 + a^4y^2 - 4a^2bcy^2 - a^2b^2c^2 = 0$.

II.

Reſolutio æquationum quarti gradus per æquationes cubicas ex iis deriva-tas explicatur.

OStenſo, quo artificio ex æquationibus quarti gradus aliæ deriventur, quæ ſint trium tantùm dimenſionum, videamus modò, qua ratione, iſtis mediantibus, poſſit illarum reſolutio obtineri, unàque ſimul earum natura cognita fieri. Et quidem, ſicuti conſiderando æquationem quarti gradus $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, veluti genitam ex multiplicatione duarum ſecundi gradus æquationum $x^2 + yx + a = 0$, & $x^2 - yx + b = 0$, deducta eſt æquatio cubica $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$; ita ſi ope hujus cubicæ æquationis invento valore incognitæ y, determinentur duæ illæ æquationes ſecundi gradus $x^2 + yx + a = 0$, & $x^2 -$

 yx

$yx + b = 0$, facile erit resolutionem obtinere ipsius æquationis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, ejusque adeo radices quatuor determinare, quum eò res redeat, ut duæ illæ æquationes secundi gradus resolvantur.

Hunc in finem ostendendum est nobis primo loco, qua ratione cognito valore incognitæ y ope cubicæ æquationis, determinentur æquationes duæ secundi gradus $x^2 + yx + a = 0$, & $x^2 - yx + b = 0$, ex quarum multiplicatione oritur æquatio $x^4 + px^2 + qx + r = 0$: nimirum, quum duæ illæ æquationes multiplicatæ simul producant æquationem $x^4 + ax^2 + bx^2 - y^2x^2 - ayx + byx + ab = 0$, comparando, ut supra, terminos istius ordine cum terminis ipsius æquationis, de qua agitur, $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, erit $a + b - y^2 = p$, hoc est $a + b = p + y^2$, sive etiam $ay + by = py + y^3$, & $by - ay = q$. Unde quum per additionem fiat $2by = py + y^3 + q$, & per subtractionem $2ay = py + y^3 - q$; erit

$$b = \frac{py + y^3 + q}{2y}, \& a = \frac{py + y^3 - q}{2y}:$$

proindeque in duabus illis æquationibus $x^2 + yx + a = 0$, & $x^2 - yx + b = 0$ positis loco a, & b valoribus istis, fient

x^2

$x^2 + yx + \frac{py + y^3 - q}{2y} = 0$, & $x^2 - yx + \frac{py + y^3 + q}{2y} = 0$, quæ utique determinatæ evadunt, cognito valore incognitæ y.

Jam valor incognitæ y inveniendus est ope cubicæ æquationis $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, inquirendo primùm ope divisorum, num æquatio ista aliquem habeat valorem rationalem, & deinde eam juxtà regulas superiùs traditas resolvendo, si utique in propriâ suâ sede constiterit; sed quemadmodum quum æquatio est litteralis, & homogenea, ii tantùm divisores sunt tentandi, qui sunt duarum dimensionum, quia in æquatione cubicâ inventâ dimensiones incognitæ y sunt duplicatæ, adeoque valores ejus non ad y, sed ad y^2 referuntur; ita si æquatio cubica extiterit in propriâ suâ sede, necesse est ex eâ secundum terminum tollere, quò possit resolutio ejus obtineri. Interim si æquatio quarti gradus fuerit $x^4 + qx + r = 0$, hoc est talis, ut careat secundo, & tertio termino, tunc æquatio cubica erit $y^6 - 4ry^2 - qq = 0$, quæ quum careat secundo ter-

termino, absque ulla præparatione statim resolvi poterit. Sed in resolutione cubicæ æquationis notare etiam oportet, quod valor, qui invenitur, non ad incognitam y, sed ad quadratum ejus referatur. Unde, ut habeatur valor incognitæ y, necesse est ex valore illo quadratam radicem extrahere.

Invento valore incognitæ y ope cubicæ æquationis, substituatur valor ille tum in æquatione $x^2 + yx + \frac{py + y^3 - q}{2y} = 0$, cùm in æquatione $x^2 - yx + \frac{py + y^3 + q}{2y} = 0$, ut ambæ evadant determinatæ. Et quoniam hæ duæ æquationes multiplicatæ simul producunt æquationem quarti gradus, de qua agitur, $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, continebunt eædem æquationes radices quatuor istius: proindeque eas resolvendo secundùm regulas superiùs traditas, habebuntur radices quatuor æquationis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$. Nec refert, quod in æquationibus illis secundi gradus coefficientes terminorum quantitates contineant radicales. Id enim resolutioni illarum æquatio-

tionum nequaquam esse potest impedimento, quum regulæ superiùs traditæ æquè procedant, quum coefficientes terminorum sunt radicales, quàm quum sunt commensurabiles, ac rationales; sed tantùm efficiet, ut radices ipsarum radicales radicalium contineant, quod mirum esse non debet, quum radices illæ ad æquationem quarti gradus propriè referantur.

Quoniam autem æquationes quarti gradus, in propriâ suâ sede existentes, in duas classes distribuimus, & alias diximus tales esse, ut contineant affectionem cubicam, alias verò ejuscemodi, ut immunes sint à cubicâ affectione; videamus modò, qua ratione unæ ab aliis distingui possint, etiam non cognitis earum radicibus. Itaque si contingat, æquationes cubicas derivatas in propriâ suâ sede existere, itaut radices ipsarum radicalibus cubicis exprimi debeant; tunc æquationes quarti gradus continebunt affectionem cubicam, earumque radices radicales quoque cubicas comprehendent. Quod si verò æquationes illæ cubicæ non existant in propriâ suâ sede, sed valorem habeant rationalem, eo casu æquationes quarti gradus immunes erunt ab affe-

ctione cubicâ, earundemque radices nonnisi radicales quadratas continebunt.

Innotescit ergo nobis natura æquationum quarti gradus, in propriâ suâ sede existentium, beneficio æquationum cubicarum, quæ ex iis derivantur. Sed mediantibus iisdem æquationibus cubicis, cognosci quoque potest, num æquationes quarti gradus existant in propriâ suâ sede, an verò in duas secundi gradus sint divisibiles: adeo, ut si casum excipias, quum æquationes quarti gradus unam continent radicem rationalem, poterit earum natura perspecta fieri, ac explorata, per solas æquationes cubicas, quæ derivantur ex iis.

Quotiescumque enim æquationes illæ cubicæ existunt in propriâ suâ sede, tunc etiam in propriâ suâ sede erunt æquationes quarti gradus, quibus hoc ampliùs accedet, quod affectionem cubicam contineant. Sed si æquationes cubicæ non sint in propriâ suâ sede, verùm valorem habeant rationalem; tunc rursus vel valor iste talis est, ùt elici exinde nequeat quadrata radix, & isto casu æquationes quarti gradus existent quidem in propriâ suâ sede, sed immunes erunt ab affectione cubicâ; vel est ejusce-

cemodi, ut extinde quadrata radix elici possit, & quum hoc contingit æquationes quarti gradus non erunt in propriâ suâ sede, sed in duas alias secundi gradus dividi poterunt.

Neque verò difficile erit horum omnium veritatem ostendere, si consideremus, quod omnis æquatio quarti gradus, repræsentata per æquationem generalem $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, juxta ea, quæ mox ostensa sunt, considerari possit veluti orta ex multiplicatione istarum secundi gradus æquationum $x^2 + yx \frac{+ py + y^3 - q}{2y} = 0$, & $x^2 - yx \frac{+ py + y^3 + q}{2y} = 0$.

Hinc enim clarè liquet, æquationem quarti gradus esse semper divisibilem in duas alias, quarum sedes est in gradu secundo, quotiescumque valor incognitæ y est rationalis; esse verò in propriâ suâ sede, quum idem ille valor est radicalis. Patetque etiam, eandem æquationem quarti gradus continere affectionem cubicam, quum valor incognitæ y continet radicales cubicas; esse verò à cubica affectione prorsus immunem, quum

idem ille valor per radicalem quadratam designatur.

Unde obiter notetur hìc velim, quàm benè analysis omnes rei, de qua agitur, casus nobis ostendat, & qua ratione, unâ eâdemque viâ, singulis satisfaciat. Quotiescumque enim æquatio quarti gradus $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ nullam habet radicem rationalem, tria contingere possunt; vel nempe, ut sit divisibilis in duas secundi gradus; vel, ut existat in propriâ suâ sede, sed immunis sit ab affectione cubicâ; vel denique, ut affectionem cubicam contineat. Pro unoquoq; casu suppeditat nobis analysis hanc cubicam æquationem $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, in qua quum duplicatæ sint dimensiones incognitæ y, perspicuum est, circa ejus valorem tria quoque contingere posse, primò ut sit rationalis, secundo ut sit expressus per radicalem quadratam, & denique, ut radicales cubicas comprehendat.

Dis-

III.

Quæ æquationes quarti gradus resolvi possint, demonstratur.

Quemadmodum non omnes æquationes cubicæ resolvi possunt, sed eæ dumtaxat, quæ unicam habent radicem realem; ita nec omnium æquationum quarti gradus resolutio potest obtineri, sed earum tantummodò, ex quibus tales derivantur æquationes cubicæ, ut & ipsæ etiam resolvi possint. Obtinetur namque resolutio æquationum quarti gradus, resolvendo æquationes cubicas, quæ derivantur ex iis. Quocirca si contingat, cubicas istas æquationes resolvi non posse, quia fortè omnes habeant radices reales, tunc nec ipsa æquationum quarti gradus resolutio poterit obtineri.

Hinc illud nobis ostendendum est, quæ nimirum inter æquationes quarti gradus tales sint, ut cubicæ æquationes, quæ ex iis derivantur, omnes habeant radices reales, nec ideo resolvi possunt. Qua in re notare priùs oportet, quod quum radices imaginariæ in æquationibus occurrant sem-

ſemper in numero pari, æquationes quarti gradus pro qualitate radicum trium tantùm ſpecierum eſſe poſſint; vel enim omnes habent radices reales; vel duas reales, & duas imaginarias; vel denique omnes radices imaginarias habent. Itaque, ut cognoſcamus, quæ ſint æquationes illæ quarti gradus, quarum cubicæ radices omnes reales habent, ſingulos hos caſus oportet proſequamur.

Et primò quidem ſi æquatio quarti gradus omnes habeat radices reales, ſint $x - a - b = 0$, $x - a + b = 0$, $x + a - c = 0$, & $x + a + c = 0$ æquationes quatuor ſimplices, quæ continent radices illas. Itaque quia productum ex duabus primis eſt $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$, & productum ex duabus reliquis eſt $x^2 + 2ax + a^2 - c^2 = 0$; erit $x^4 - 2a^2x^2 - b^2x^2 - c^2x^2 - 2ab^2x + 2ac^2x + a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2 = 0$ æquatio quarti gradus, quæ ex illarum omnium multiplicatione producitur: proindeque comparando terminos ipſius cum terminis æquationis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, erit $p = -2a^2 - b^2 - c^2$, $q = 2ac^2 - 2ab^2$, & $r = a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2 = 0$; atque adeo ſubſtitutis valoribus iſtis in æquatione cubicâ $y^6 + 2py^4$

$+ p^2y^2$

$+ p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, fiet iſta $y^6 - 4a^2y^4 - 2b^2y^4 - 2c^2y^4 + 8a^2b^2y^2 + 8a^2c^2y^2 - 2b^2c^2y^2 + b^4y^2 + c^4y^2 - 4a^2c^4 + 8a^2c^2b^2 - 4a^2b^4 = 0$.

Jam cubicæ hujus æquationis radices omnes reales ſunt. Evaneſcit etenim æquatio, ſive loco y^2 ponatur $4a^2$, ſive $b^2 + 2bc + c^2$, ſive demum $b^2 - 2bc + c^2$. Unde quotieſcumque æquatio quarti gradus omnes habet radices reales, æquatio cubica, quæ ex ea derivatur, omnes item radices reales habebit: proindeque ſicuti iſta reſolvi non poteſt, ita nec illius reſolutio poterit obtineri. Nec ad rem facit, quod æquatio cubica reperta ſecundum terminum habeat, & quum ea eſt reſolvenda, oporteat terminum illum tollere. Nam tollendo ſecundum terminum ex æquatione aliquâ, radices ejus augentur quidem, vel minuuntur, nequaquam verò ex realibus evadunt imaginariæ.

Quod ſi æquatio quarti gradus duas habeat radices reales, & alias duas imaginarias, ſint $x - a - b = 0$, & $x - a + b = 0$ æquationes ſimplices, quæ continent radices duas reales, & $x + a - \sqrt{-c^2} = 0$, & $x + a + \sqrt{-c^2} = 0$ æquationes ſimplices, quæ continent radi-

dices duas imaginarias. Itaque quia productum ex duabus primis est $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$, & productum ex duabus secundis est $x^2 + 2ax + a^2 + c^2 = 0$; erit $x^4 - 2a^2x^2 - b^2x^2 + c^2x^2 - 2ab^2x - 2ac^2x + a^4 - a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2 = 0$ æquatio quarti gradus, quæ producitur ex illarum omnium multiplicatione. Quare comparando terminos istius ordine cum terminis æquationis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, fiet $p = c^2 - b^2 - 2a^2$, $q = -2ab^2 - 2ac^2$, & $r = a^4 - a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2$: proindeque substitutis valoribus istis in æquatione cubicâ $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, habebitur loco ejus hæc alia $y^6 - 4a^2y^4 - 2b^2y^4 + 2c^2y^4 + 8a^2b^2y^2 - 8a^2c^2y^2 + 2b^2c^2y^2 + b^4y^2 + c^4y^2 - 4a^2c^4 - 8a^2c^2b^2 - 4a^2b^4 = 0$.

Hæc autem æquatio cubica duas habet radices imaginarias, & unam realem. Evanescit etenim æquatio, non modò si loco y^2 ponatur quantitas realis $4a^2$, verùm etiam si ponātur quantitates imaginariæ $b^2 - c^2 + \surd - 4b^2c^2$, & $b^2 - c^2 - \surd - 4b^2c^2$. Itaque quotiescumque æquatio quarti gradus duas habet radices reales, & alias duas imaginarias; æquatio cubica, quæ ex illâ derivatur, unam tan-

tantùm continebit radicem realem, & duæ aliæ ipſius radices imaginariæ erunt. Quocirca ſicuti æquatio iſta cubica reſolvi poteſt, ita & ipſius æquationis quarti gradus reſolutio poterit obtineri.

Denique ſi æquatio quarti gradus omnes habeat radices imaginarias, ſint $x - a - \sqrt{-b^2} = 0$, & $x - a + \sqrt{-b^2} = 0$ æquationes ſimplices, quæ continent duas illarum radicum, & $x + a - \sqrt{-c^2} = 0$, & $x + a + \sqrt{-c^2} = 0$ æquationes ſimplices, quæ cōtinent alias duas. Itaque quia productum ex duabus primis eſt $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$, & productum ex duabus reliquis eſt $x^2 + 2ax + a^2 + c^2 = 0$; erit $x^4 - 2a^2x^2 + b^2x^2 + c^2x^2 + 2ab^2x - 2ac^2x + a^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = 0$ æquatio quarti gradus, quæ ex illarum omnium multiplicatione producitur. Quare comparando terminos iſtius ordine cum terminis æquationis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, erit $p = b^2 + c^2 - 2a^2$, $q = 2ab^2 - 2ac^2$, & $r = a^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$: proindeque ſubſtitutis valoribus iſtis in æquatione cubicâ $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, habebitur loco ejus hæc alia $y^6 - 4a^2y^4 + 2b^2y^4 + 2c^2y^4 - 8a^2b^2y^2 - 8a^2c^2y^2 - 2b^2c^2y^2 + b^4y^2 + c^4y^2 - 4a^2c^4 +$

8a²

$8a^2c^2b^2 - 4a^2b^4 = 0$.

Hujus autem cubicæ æquationis radices omnes ſunt reales; nam evaneſcunt contrarietate ſignorum termini æquationis, ſive loco y^2 ponatur $4a^2$, ſive $-b^2 - 2bc - c^2$, ſive $-b^2 + 2bc - c^2$. Quocirca quotieſcumque æquatio quarti gradus omnes habet radices imaginarias, æquatio cubica, quæ ex eâ derivatur, radices omnes reales habebit: proindeque ſicuti æquatio iſta cubica reſolvi nequit, ita nec ipſius quarti gradus æquationis reſolutio poterit obtineri.

Patet itaque, eas tantùm æquationes quarti gradus reſolvi poſſe, quæ duas habent radices reales, & alias duas imaginarias. Nam quotieſcumque vel omnes radices ſunt reales, vel omnes imaginariæ, derivantur ex iis tales æquationes cubicæ, ut omnes ipſarum radices ſint reales: proindeque ſicuti iſtæ reſolvi non poſſunt, ita nec illarum reſolutio poterit haberi. Sed videamus modò, qua ratione æquationes quarti gradus, in quibus radices omnes ſunt reales, diſtingui poſſunt ab iis, quæ omnes habent radices imaginarias; nam tam illæ, quàm iſtæ ſuppetunt nobis æquationes cubicas, quarum radices omnes ſunt reales.

Et

Et quidem semper ac in æquatione quarti gradus, quæ secundo termino caret, tertius terminus afficitur signo +; per ea, quæ superiùs ostensa sunt, certum est, æquationem illam radices duas imaginarias habere. Unde si contingerit hoc casu, æquationem cubicam, quæ exinde derivatur, talem esse, ut omnes ejus radices sint reales; tunc eadem illa æquatio quarti gradus non duas tantùm, sed radices omnes habebit imaginarias. Verumtamen, quia æquationes, quæ secundo termino carent, possunt radices imaginarias continere, etiamsi in iis tertius terminus afficiatur signo —; proinde quod quærimus criterium non ex ipsis æquationibus quarti gradus, sed ex æquationibus cubicis, quæ ex iis derivantur, repeti debet: quod equidem haud difficile erit invenire, si ad constitutionem æquationum cubicarum sedulò attendatur.

Ad eam enim attendentes, inveniemus, quod quum æquatio quarti gradus omnes habet radices reales, tunc æquatio ejus cubica secundum terminum habeat affectum signo —, tertium verò signo +; sed quotiescumque æquationis quarti gradus radices omnes sunt

imaginariæ, & æquationis cubicæ exinde derivatæ secundus terminus afficitur signo —, eo casu tertius terminus itidem signo — affici debeat. Itaque habebit æquatio quarti gradus radices omnes reales, si utique ejus æquatio cubica, non modò radices omnes reales habeat, verùm etiam secundum terminum affectum signo —, & tertium signo +; at si æquatio cubica habeat quidem radices omnes reales, sed secundum terminum, vel habeat affectum signo +, vel etiam affectum signo —, sed tali quoque signo sit affectus terminus tertius, tunc æquatio quarti gradus radices omnes habebit imaginarias.

IV.

Resolutio æquationum quarti gradus exemplis illustratur.

ÆQuationum quarti gradus resolutio adeo quidem generaliter à nobis est ostensa, ut quæ sint earum radices, neq; etiam in formulis, sub quibus æquationes omnes solent exhiberi, nobis innotuerit. Dabimus ergo in Tyronum gratiam exempla nonnulla hujus resolutionis, ut noscant, qua ratione ad praxim

sint

ſint revocanda, quæcumque omnia circa rem iſtam generaliter à nobis ſunt enunciata. Et quoniam æquationes quarti gradus, quæ exiſtunt in propriâ ſuâ ſede, duplicis ſunt ſpeciei, quum aliæ contineant affectionem cubicam, aliæ ab illâ ſint immunes; proinde exempla afferemus pro utraque ſpecie æquationum, qua in re ordiemur ab iis, quæ immunes ſunt à cubicâ affectione, utpote quæ ſemper, & longè faciliùs reſolvuntur; cujuſmodi ſunt illæ, quarum æquationes cubicæ valorem habent rationalem.

Proponatur itaque primùm reſolvenda æquatio quarti gradus $x^4 - 12x^2 + 12x - 3 = 0$, quæ ſi utique repræſentetur per æquationem generalem $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, erit $p = -12$, $q = +12$, & $r = -3$. Quoniam æquatio cubica, derivata ex æquatione generali $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, eſt $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, poſitis in iſtâ loco p q, & r valoribus ſuis, fiet $y^6 - 24y^4 + 156y^2 - 144 = 0$, in qua quum y^2 perinde valeat, ac 12, erit $y = 2\surd 3$: proindeque æquationes duæ $x^2 + yx + \frac{py + y^3 - q}{2y} = 0$, & $x^2 - yx + \frac{py + y^3 + q}{2y} = 0$,

$= 0$, ex quarum multiplicatione fingitur orta æquatio quarti gradus $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, fient $x^2 + 2x\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$, & $x^2 - 2x\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$. Unde, quia radices illius sunt $-\sqrt{3} + \sqrt{3 + \sqrt{3}}$, & $-\sqrt{3} - \sqrt{3 + \sqrt{3}}$, istius verò radices sunt $+\sqrt{3} + \sqrt{3 - \sqrt{3}}$, & $+\sqrt{3} - \sqrt{3 - \sqrt{3}}$; erunt quatuor istæ radices valores æquationis propositæ $x^4 - 12x^2 + 12x - 3 = 0$.

Proponatur secundò resolvenda æquatio quarti gradus $x^4 - 8x^2 + 16x - 8 = 0$. Quoniam in istâ æquatione p est -8, q est $+16$, & r idem valet, ac p, hoc est -8; æquatio cubica $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, derivata ex æquatione generali $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, fiet in casu nostro $y^6 - 16y^4 + 96y^2 - 256 = 0$. Et quoniam in hac æquatione y^2 idem valet, ac 8; erit $y = 2\sqrt{2}$; adeoque æquationes duæ $x^2 + yx \frac{+py + y^3 - q}{2y} = 0$, & $x^2 - yx \frac{+py + y^3 + q}{2y} = 0$, fient $x^2 + 2x\sqrt{2} - \sqrt{8} = 0$, & $x^2 - 2x\sqrt{2} + \sqrt{8} = 0$, Unde quum radices prioris æqua-

quationis sint $-\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{8}}$, & $-\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{8}}$, radices verò alterius æquationis sint $+\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{8}}$, & $+\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{8}}$, erunt quatuor istæ radices valores propositæ æquationis $x^4 - 8x^2 + 16x - 8 = 0$.

Proponatur ulteriùs resolvenda æquatio litteralis quarti gradus $x^4 - 4abx^2 + 4abcx - abc^2 = 0$. Repræsentetur ea per formulam generalẽ $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, eritque $p = -4ab$, $q = +4abc$, & $r = -abc^2$. Substituantur valores isti in æquatione cubicâ $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, derivatâ ex formulâ illâ generali, jamque habebitur loco ejus hæc alia $y^6 - 8aby^4 + 16a^2b^2y^2 + 4abc^2y^2 - 16a^2b^2c^2 = 0$. Et quoniam in cubicâ istâ æquatione y^2 idem valet, ac $4ab$, erit $y = 2\sqrt{ab}$: proindeque æquationes duæ $y^2 + yx \dfrac{+py+y^3-q}{2y} = 0$, & $y^2 - yx \dfrac{+py+y^3+q}{2y} = 0$ fient $x^2 + 2x\sqrt{ab} - c\sqrt{ab} = 0$, & $x^2 - 2x\sqrt{ab} + c\sqrt{ab} = 0$. Quocirca, quia prioris æquationis radices sunt $-\sqrt{ab}+\sqrt{ab+c\sqrt{ab}}$, & −

& $-\sqrt{ab}-\sqrt{ab+c\sqrt{ab}}$; radices verò alterius æquationis sunt hæ duæ $\sqrt{ab}+\sqrt{ab-c\sqrt{ab}}$, & $+\sqrt{ab}-\sqrt{ab-c\sqrt{ab}}$; erunt quatuor istæ radices valores propositæ æquationis $x^4-4abx^2+4abcx-abc^2=0$.

Atque hæc sufficiant exempla, quum æquationes quarti gradus immunes sunt à cubicâ affectione. Demus modò unum, aut alterum exemplum, quum eædem æquationes quarti gradus affectionem cubicam continent, id quod contingit, quum æquationes cubicæ, quæ ex iis derivantur, valorem rationalem non habent. Proponatur itaque æquatio $x^4-6x+3=0$, in qua non modò secundus, verùm etiam tertius terminus deficit. Hæc continetur sub formulâ generali $x^4+qx+r=0$, cujus æquatio cubica est $y^6-4ry^2-qq=0$. Et quoniam, factâ terminorum comparatione, habetur $q=-6$, & $r=3$; proinde substitutis valoribus istis, fiet æquatio illa cubica $y^6-12y^2-36=0$, quæ quum nullum habeat valorem rationalem, indicio nobis esse potest, æquationem propositam affectionem cubicam continere.

Jam si cubicam istam æquationem, quæ

quæ secundo termino caret, resolvamus methodo superiùs traditâ inveniemus $y^2 = \sqrt[3]{18 + \sqrt{260}} + \sqrt[3]{18 - \sqrt{260}}$; atque adeo erit ipsa incognita $y = \sqrt{\sqrt[3]{18 + \sqrt{260}} + \sqrt[3]{18 - \sqrt{260}}}$. Quocirca si in duabus æquationibus $x^2 + yx \frac{+ y^3 - q}{2y} = 0$, & $y^2 - yx \frac{+ y^3 + q}{2y} = 0$, ex quarum multiplicatione fingitur oriri æquatio $x^4 + qx + r = 0$, loco y ponamus valorem inventum, simulque loco q subrogemus valorem suũ, jam utraque illarum æquationum determinabitur. Unde non aliud restat, quam ut illarum æquationum sic determinatarum radices capiantur, quum eæ dent valores propositæ æquationis. Sed nec æquationes eâ ratione determinatas, nec earundem radices hìc exhibemus, quia prolixæ earum expressiones Typographo nostro molestiam non exiguam afferunt.

Proponatur deinde resolvenda æquatio quarti gradus $x^4 - 3x^2 + 8x - 3 = 0$, quæ secundo tantùm termino caret. Jam si hæc repræsentetur per formulã generalẽ $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, erit $p = -3$, $q = +8$, & $r = -3$. Unde quum æ-

quatio cubicâ, derivata ex æquatione illâ generali, sit $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, debitis substitutionibus peractis, fiet illa $y^6 - 6y^4 + 21y^2 - 64 = 0$, quæ quia valorem rationalem non admittit, consequens est, propositam æquationem $x^4 - 3x^2 + 8x - 3 = 0$ affectionem cubicam continere. Resolvenda est ergo methodo superiùs traditâ æquatio cubicâ $y^6 - 6y^4 + 21y^2 - 64 = 0$; sed quum in eâ reperiatur secundus terminus, à quo utique immunis semper esse debet æquatio cubica resolvenda, illum primò oportet auferamus.

Hunc in finem ponamus $y^2 - 2 = z^2$, & jam si scribamus $z^2 + 2$ loco y^2, $z^4 + 4z^2 + 4$ loco y^4, & $z^6 + 6z^4 + 12z^2 + 8$ loco y^6, orietur æquatio $z^6 + 9z^2 - 38 = 0$, quæ ut vides secundo termino caret. Et quoniam æquatio ista resoluta per regulas traditas dat $z^2 = \sqrt[3]{19 + \sqrt{361}} + \sqrt[3]{19 - \sqrt{361}}$, erit $y^2 = 2 + \sqrt[3]{19 + \sqrt{361}} + \sqrt[3]{19 - \sqrt{361}}$, adeoque per extractionem quadratæ radicis fiet incognita $y = \sqrt{2 + \sqrt[3]{19\sqrt{361}} + \sqrt[3]{19 - \sqrt{361}}}$. Unde si loco y scribamus valorem istum in

æqua-

æquationibus $x^2 + yx \frac{+py + y^3 - q}{2y} = o$;

& $x^2 - yx \frac{+py + y^3 + q}{2y} = o$, ex quarum multiplicatione oriri ponitur æquatio generalis $x^4 + px^2 + qx + r = o$, simulque loco p, & q subrogemus valores suos; jam utraque illarum æquationum determinabitur : proindeque earundem radices dabunt valores quatuor propositæ æquationis $x^4 + px^2 + qx + r = o$.

V.

Reductio æquationum quarti gradus per æquationes cubicas ex iis derivatas exemplis demonstratur.

Diximus beneficio æquationum cubicarum, quæ derivantur ex æquationibus quarti gradus, non modò istas resolvi posse, quum constiterint in propriâ suâ sede, verùm etiam posse ampliùs inquiri, num eædem æquationes quarti gradus deprimi queant, dividendo eas in alias duas, quæ sint duarum tantùm dimensionum. Si enim æquationes illæ cubicæ nullum habeant valorem ra-

tionalem; tunc æquationes quarti gradus, ex quibus sunt derivatæ, existunt in propriâ suâ sede, & insuper affectionem cubicam continent. Quod si verò habeant quidem valorem rationalem, sed talem, ut ex eo elici non possit quadrata radix; eo casu æquationes quarti gradus existunt quidem in propriâ suâ sede, sed immunes sunt à cubicâ affectione. Et denique si eædem æquationes cubicæ non modò habeant valorem rationalem, sed etiam valor ille hujusmodi sit, ut elici exinde possit quadrata radix; tunc æquationes quarti gradus non existunt in propriâ suâ sede, sed semper in duas alias, quæ sint duarum tantùm dimensionum, deprimi possunt.

Jam ex iis tribus, quæ contingere possunt in æquationibus cubicis, derivatis ex æquationibus quarti gradus, priora duo satis, superque exemplis explicuimus. Sed ut eorum omnium, quæ à nobis dicta sunt, veritas innotescat, non abs re erit, tertium quoque, sive postremum aliquibus exemplis ostendere. Proponatur itaque æquatio quarti gradus $x^4 - 17x^2 + 12x + 12 = 0$, & mediante æquatione cubicâ, quæ ex illâ derivatur, oporteat inquirere, num deprimi queat,

divi-

dividendo eas in alias duas, quæ sint duarum tantùm dimensionum. Repræsentetur æquatio illa per formulam generalem $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, eritque $p = -17$, $q = +12$, & $r = +12$, Substituantur valores isti in æquatione cubicâ $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, derivatâ ex æquatione illâ generali; & habebitur loco ejus hæc alia $y^6 - 34y^4 + 241y^2 - 144 = 0$, in qua y^2 perinde valet, ac 9.

Quum igitur æquatio cubica, derivata ex æquatione propositâ $x^4 - 17x^2 + 12x + 12 = 0$, non modò habeat valorem tionalem, verùm etiam talem, ut elici exinde possit quadratâ radix; consequens est, propositam æquationem non existere in propriâ suâ sede, sed in duas alias secundi gradus divisibilem esse. Neque verò difficile erit, duas istas æquationes exhibere. Posuimus enim æquationem generalem $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ oriri ex multiplicatione mutuâ istarum æquationum $x^2 + yx \dfrac{+py + y^3 - q}{2y} = 0$, & $x^2 - yx \dfrac{+py + y^3 + q}{2y} = 0$. Itaque, quum sit $y^2 = 9$, erit $y = 3$, adeoque si in iis æqua-

æquationibus loco p, q, & y ponantur valores correſpondentes, una fiet $x^2 + 3x - 6 = 0$, altera $x^2 - 3x - 2 = 0$, patetque duas iſtas æquationes per ſe mutuò multiplicatas producere æquationem propoſitam $x^4 - 17x^2 + 12x + 12 = 0$.

Proponatur ſecundò æquatio quarti gradus $x^4 - 10x^2 - 4x + 8 = 0$, & inquirendum ſit etiam, num æquatio iſta in duas alias ſecundi gradus ſit diviſibilis, nec ne. Comparentur termini hujus æquationis cum terminis æquationis generalis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, eritque $p = -10$, $q = -4$, & $r = +8$. Ponantur valores iſti in æquatione cubicâ $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$. derivatâ ex generali illa æquatione, & prodibit loco ejus hæc alia $y^6 - 20y^4 + 68y^2 - 16 = 0$. Unde, quum in iſtâ æquatione y^2 tantundem valeat, ac 4, erit valor ejus non modò rationalis, verùm etiam quadratus: proindeque concludendum erit, propoſitam æquationem in duas alias ſecundi gradus dividi poſſe, quæ quidem erunt $x^2 - 2x - 4 = 0$. & $x^2 + 2x - 2 = 0$.

Sed oſtendamus id etiam in æquationibus litteralibus: quem in finem proponatur ulteriùs æquatio quarti gradus litte-

teralis $x^4 - a^2x^2 - c^2x^2 + b^2x^2 + ac^2x + ab^2x - b^2c^2 = 0$, & oporteat inquirere, num ea existat in propriâ suâ sede, an verò in duas alias secundi gradus sit divisibilis. Conferantur termini ipsius cum terminis æquationis generalis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, & erit $p = b^2 - a^2 - c^2$, $q = ac^2 + ab^2$, & $r = - b^2c^2$. Substituantur valores isti in æquatione cubicâ derivatâ ex æquatione generali $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, & fiet ista $y^6 + 2b^2y^4 - 2a^2y^4 - 2c^2y^4 + b^4y^2 - 2b^2a^2y^2 + a^4y^2 + 2b^2c^2y^2 + 2a^2c^2y^2 + c^4y^2 - a^2c^4 - 2a^2c^2b^2 - a^2b^4 = 0$, quæ quum valorem habeat rationalem, & quadratum: (est enim $y^2 = a^2$;) consequens est, æquationem propositam non existere in propriâ suâ sede, sed in duas alias secundi gradus dividi posse.

Quæ verò sint duæ istæ æquationes secundi gradus, in quas est divisibilis æquatio proposita $x^4 - a^2x^2 - c^2x^2 + b^2x^2 + ac^2x + ab^2x - b^2c^2 = 0$, sic quidem invenietur. Quoniam habetur $y^2 = a^2$, erit $y = a$. Unde, si in duabus æquationibus $x^2 + yx \frac{+py + y^3 - q}{2y} = 0$, & $x^2 - yx \frac{+py + y^3 + q}{2y} = 0$, ex quarũ multi-

tiplicatione mutuâ ponitur oriri æquatio generalis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, scribamus a loco y, & una simul loco p, & q subrogemus volores suos, signis probè observatis; fiet illarum æquationum una $x^2 + ax - c^2 = 0$, & altera $x^2 - ax + b^2 = 0$. Quocirca, quia duæ istæ æquationes multiplicatæ simul producunt æquationem propositam; eæ erunt, in quas æquatio proposita vicissim dividi poterit, & non aliæ.

Ex adductis igitur exemplis abundè liquet, quod beneficio æquationum cubicarum, quæ derivantur ex æquationibus quarti gradus, non modò istarum resolutio, quum fuerint in propriâ suâ sede, possit obtineri, verùm etiam hoc ampliùs cognosci queat, num eædem æquationes quarti gradus existant in sede suâ propriâ, an verò in duas alias secundi gradus sint divisibiles: adeo, ut mediantibus cubicis illis æquationibus natura æquationum quarti gradus fiat nobis omninò cognita, ac explorata. Excipiendus est autem casus, quum æquatio quarti gradus unum habet valorem rationalem. Tunc enim illa non existit in sede suâ propriâ, quum ad aliam tertii gradus, invento valore illo rationali, deprimi pos-

possit; & tamen æquatio cubica exinde derivata, quia nullum valorem rationalem admittit, indicabit nobis existere illam in propriâ suâ sede, itemque cubicam affectionem continere.

Quod equidem, ut exemplo aliquo ostendamus, assumatur æquatio cubica $x^3 + 3x^2 - 9x - 23 = 0$, quæ existit in propriâ suâ sede, eaque multiplicetur per æquationem simplicem $x - 3 = 0$, ut oriatur æqnatio quarti gradus secundo termino carens $x^4 - 18x^2 + 4x + 69 = 0$, quæ unum habeat valorem rationalem. Jam conferendo terminos hujus æquationis cum terminis æquationis generaralis $x^4 + px^2 + qx + r = + 0$, erit $p = - 18$, $q = + 4$, & $r = 69$. Quare substitutis valoribus istis in æquatione cubicâ $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, deductâ ex generali illâ æquatione, prodibit loco ejus hæc alia $y^6 - 36y^4 - 48y^2 - 16 = 0$; quæ profectò, siquidem rei periculum fiat, nullum valorem rationalem habere invenietur.

Et sanè fieri nullâ ratione potest, ut isto casu æquatio cubica valorem admittat rationalem. Id enim si contingeret, æquatio quarti gradus, vel esset in propriâ suâ sede, sed immunis ab affectione

cu-

cubicâ, vel etiam in duas secundi gradus esset divisibilis; quorũ utrumq; repugnat, quum ex hypothesi componatur ex æquatione simplici, & aliâ cubicâ in propriâ suâ sede existente. Et quamquã ex eo, quod æquatio cubica exinde derivata nullum habeat valorem rationalem, non rectè deducatur existere illam in propriâ suâ sede, optimè tamen infertur affectionem cubicam continere, quia tres ex ejus radicibus per latera cuborum debent designari. Unde crediderim, saltem ex hoc capite defendi posse, cur æquatio cubica, quæ derivatur ex æquatione quarti gradus, in qua unus tantùm valor est rationalis, nullum valorem rationalem admittat.

VI.

Reductio æquationum quarti gradus per æquationes cubicas ex iis derivatas aliâ methodo instituitur.

Quemadmodum æquationum cubicarum resolutionem Italis omnes acceptam ferunt; ita ab iisdem Italis excogitatam fuisse regulam derivandi æquationes cubicas ex æquationibus quarti gradus, nemo est, qui illud in du-

dubium revocabit. Sed hanc regulam pro reducendis æquationibus quarti gradus, quæ naturâ suâ in alias duas secundi gradus sunt divisibiles, nemo meliùs explicavit, & ad umbilicum perduxit, quàm Vir clarissimus Hyacinthus Christophorus, insigne Italiæ decus, cui, si quid Ego in hisce studiis profecerim, id omne libenter acceptum refero. Et quamquam ipsemet methodum suam in lucem ediderit in epistolâ directâ ad doctissimum Virum Nicolaum Galitia, in Lycæo nostro Neapolitano summum Canonum Professorem, gratissimâ memoriâ non uno nomine mihi semper recolendum; ne tamen aliquid prætermissum videatur, quod scitu sit dignum, ejus artificium hìc breviter, ac perspicuè aperire non gravabimur.

Nimirum si utraque pars æquationis quarti gradus quadratum esset perfectum, liceret per extractionem quadratæ radicis æquationem illam ad aliam secundi gradus deprimere. Itaque, quum æquatio aliqua quarti gradus naturâ suâ deprimi potest, nec tamen ejus utraque pars quadratum perfectum deprehenditur; in id incumbendum, ut aliquid ad utramque partem addatur, quò utraque perfectum quadratum evadat. Sit ergo $x^4 = 2px^2$
$+ 4qx$

$+ 4qx + r$ æquatio quarti gradus naturâ ſuâ in duas alias ſecundi gradus diviſibilis. Apponatur ad utramque partem quantitas aliqua, ut utraque fiat quadratum perfectum; & jam ſi fuerit $x^2 + y$ radix quadrata partis prioris erit $2yx^2 + y^2$ id quod utrique parti debet apponi. Unde eò res redit, ut qua ratione determinari debeat quantitas y, inveſtigemus.

Hunc in finem conſideremus hanc quadrati proprietatem, nulli non cognitam: nimirum, quod ſi fiat quadratum ex radice binomiâ, illud conſtabit ex tribus terminis, eritque id, quod producitur ex extremorum multiplicatione, æquale quadrato, quod fit ex termino medio dimidiato. Ita quadratum ex $a + b$ eſt $a^2 + 2ab + b^2$, & id, quod producitur, multiplicando a^2 per b^2, adæquat quadratum, ex ab, ſemiſſe termini medii $2ab$. Quocirca quia addendo $2xy^2 + y^2$, ad utramque partem aſſumptæ æquationis, fit $x^4 + 2yx^2 + y^2 = 2px^2 + 2yx^2 + 4qx + r + y^2$, in qua non modò pars prior $x^4 + 2yx^2 + y^2$, verùm etiam pars altera $2px^2 + 2yx^2 + 4qx + r + y^2$ debet eſſe quadratum; erit in iſtâ id, quod oritur, multiplicando $2px^2 + 2yx^2$ per $r + y^2$, æquale quadrato, quod fit ex $2qx$.

Un-

Unde institutâ æqualitate, eademque per traditas regulas ordinatâ, erit $y^3 + py^2 + ry + pr - 2qq = 0$ æquatio, per quam determinari debet quantitas y.

Jam, quum æquatio quarti gradus $x^4 = 2px^2 + 4qx + r$ naturâ suâ in duas alias secundi gradus est divisibilis, habebit quantitas y in inventâ æquatione cubicâ $y^3 + py^2 + ry + pr - 2qq = 0$ talem valorem rationalem, ut si secundùm eum determinetur quantitas $2yx^2 + y^2$, ad utramque partem æquationis addenda, poterit ista per extractionem quadratæ radicis semper ad aliam secundi gradus deprimi. Unde vicissim, si invento valore incognitæ y, contigerit æquationem propositam traditâ methodo deprimi non posse; indicio erit, eam in duas alias secundi gradus non esse divisibilem. Cæterùm æquatio illa, ad quam deprimitur æquatio proposita, una erit ex æquationibus componentibus; & si utique per eam dividatur eadem æquatio proposita, fiet divisio absque ullo residuo, & habebitur in quotiente æquatio componens altera.

2. Proponatur æquatio quarti gradus $x^4 = 8x^2 - 4x - 3$, & oporteat juxta hanc methodum inquirere, num ea in duas alias

secundi gradus sit divisibilis. Comparentur termini ejus ordine cum terminis æquationis generalis $x^4 = 2px^2 + 4qx + r$, eritque $p = 4$, $q = -1$, & $r = -3$. Substituantur valores isti in æquatione cubicâ $y^3 + py^2 + ry + pr - 2qq = 0$, & prodibit loco ejus hæc alia $y^3 + 4y^2 - 3y - 14 = 0$. Unde, quia in istâ æquatione y idem valet, ac -2; quantitas $2yx^2 + y^2$, ad utramque partem æquationis addenda, fiet $-4x^2 + 4$. Quumque per additionem istius quantitatis æquatio proposita evadat $x^4 - 4x^2 + 4 = 4x^2 - 4x + 1$, quæ per extractionem quadratæ radicis deprimitur ad hanc aliam $x^2 - 2 = 2x - 1$, hoc est $x^2 - 2x - 1 = 0$; erit æquatio proposita, in duas secundi gradus divisibilis, quarum una erit $x^2 - 2x - 1 = 0$, altera $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Quod si in æquatione propositâ deficiat non modò secundus terminus, verùm etiam tertius, aut quartus; eadem methodus adhuc quoque sibi locum vindicabit. Sit enim $x^4 = 12x + 5$ æquatio quarti gradus. Itaque, quia comparando terminos istius cum terminis æquationis generalis $x^4 = 2px^2 + 4qx + r$, fit $p = 0$, $q = 3$, & $r = 5$; æquatio cubica $y^3 + py^2$

$py^2 + ry + pr - 2qq = 0$ mutabitur isto casu in hanc aliam $y^3 + 5y - 18 = 0$. Unde, quia in ista æquatione y idem valet, ac 2; quantitas $2yx^2 + y^2$, ad utramque partem æquationis addenda, fiet $4x^2 + 4$. Quocirca, quia per additionem istius quantitatis æquatio proposita fit $x^4 + 4x^2 + 4 = 4x^2 + 12x + 9$, eademque per extractionem quadratæ radicis deprimitur ad hanc aliam $x^2 + 2 = 2x + 3$, hoc est $x^2 - 2x - 1 = 0$; erit æquatio proposita in duas alias secundi gradus divisibilis, earumque una erit $x^2 - 2x - 1 = 0$, altera $x^2 + 2x + 5 = 0$.

Proponatur ulteriùs æquatio quarti gradus $x^4 = 12x^2 - 16$, quæ secundo, & quarto termino caret. Et quoniam cōparatis terminis istius ordine cum terminis æquationis generalis $x^4 = 2px^2 + 4qx + r$, fit $p = 6$, $q = 0$, & $r = -16$; subrogatis hisce valoribus, mutabitur æquatio cubica $y^3 + py^2 + ry + pr - 2qq = 0$ in hanc aliam $y^3 + 6y^2 - 16y - 96 = 0$: proindeque, quia in ista æquatione y idem valet, ac -4; quantitas $2yx^2 + y^2$, ad utramque partem æquationis addenda, fiet $-8x^2 + 16$. Unde, quia per additionem istius quantitatis æquatio proposita evadit x^4

$-8x^2 + 16 = 4x^2$, atque hæc per extractionem quadratæ radicis deprimitur ad hanc aliam $x^2 - 4 = 2x$, hoc eſt $x^2 - 2x - 4 = 0$, erit æquatio propoſita in duas alias ſecundi gradus diviſibilis, earumque una erit $x^2 - 2x - 4 = 0$, altera $x^2 + 2x - 4 = 0$.

Atque hac occaſione notetur hoc loco velim, quod etſi, quum utraque æquationum componentium ſecundo termino caret, æquatio compoſita non modò ſecundo, verùm etiam quarto termino careat; non hinc tamen vicìſſim, quum æquatio compoſita caret ſecundo, & quarto termino, æquationes componentes ſecundi termini expertes eſſe debeant. Æquatio enim $x^4 - 12x^2 + 16 = 0$ ſecundo, & quarto termino caret, & tamen ejus æquationes componentes ſunt $x^2 - 2x - 4 = 0$, & $x^2 + 2x - 4 = 0$, quæ terminis omnibus ſunt repletæ. Sed fieri quoq; poteſt, ut æquatio quarti gradus habeat tantùm primum, & ultimũ terminũ, componaturque nihilominus ex duabus æquationibus ſecundi gradus, in quibus nullus deſit terminorum. Sic duæ iſtæ æquationes ſecundi gradus $x^2 - 2x + 2 = 0$, & $x^2 + 2x + 2 = 0$ terminis omnibus ſunt repletæ, & tamen multipli-

ca-

catæ simul componunt æquationem quarti gradus $x^4 + 4 = 0$, in qua desunt omnes termini intermedii.

Neque verò methodus, quàm præ manibus habemus, deficiet nobis in isto casu. Si enim æquatio $x^4 = -4$ repræsentetur per æquationem generalem $x^4 = 2px^2 + 4qx + r$, fiet $p = 0$, $q = 0$, & $r = -4$: proindeque subrogatis valoribus istis in æquatione cubicâ $y^3 + py^2 + ry + pr - 2qq = 0$ prodibit loco ejus hæc alia $y^3 - 4y = 0$, hoc est $y^2 - 4 = 0$. Unde, quum sit $y = 2$, quantitas $2yx^2 + y^2$, ad utramque partem æquationis addenda, fiet $4x^2 + 4$; adeoque per additionem istius quantitatis evadet æquatio proposita $x^4 + 4x^2 + 4 = 4x^2$, quæ per extractionem quadratæ radicis deprimitur ad hanc aliam $x^2 + 2 = 2x$, hoc est $x^2 - 2x + 2 = 0$, quæ erit æquatio componens una; & si utique dividatur $x^4 + 4 = 0$ per $x^2 - 2x + 2 = 0$, habebitur in quotiente æquatio componens altera $x^2 + 2x + 2 = 0$.

Itaque semper, ac æquatio quarti gradus est composita, sive in eâ deficiat tantùm secundus terminus, sive cum secundo deficiat quoque tertius, aut quartus, sive demum deficiant termini

omnes intermedii; semper inquam per hanc methodum poterunt æquationes componentes inveniri. Sed eadem methodus potest nobis usui esse, etiam quum æquatio quarti gradus terminis omnibus est repleta: nimirum si terminus secundus jungatur cũ primo, & in inveniendâ quantitate, quæ ad utramque partem æquationis addi debet, ut utraque quadratum evadat, ejus quoque ratio habeatur. Verum id sufficiat indicasse, & qui plura cupit, adeat laudatam Auctoris epistolam, quæ reperitur in calce sui tractatus de doctrina triangulorum, editi Venetiis anno 1720.

CAP. IX.

De resolutione æquationum altioris gradus.

Resolutio æquationum, quæ plures habent dimensiones, quàm quatuor, inaudita est apud Vulgus Algebristarum, non quod earum nõ ita frequens sit usus in Algebrâ, quemadmodum ipsi jactitant; sed quia, si particulares quosdam casus excipias, nemo hactenus pro illarum resolutione methodum protulit generalem.

Non

Non is ego sum, qui ausu quodam gigante lapidem istum movere possim, nec à me tale quicquam jure debet expectari, utpote qui è proprio tyrocinio vix dum egressus, multum abest, ut cum aliis, qui huic rei operam navarunt, possim comparari. Præstabo tamen, quod possum, & nisi resolutionem tradam istarum æquationum, saltem principia, quibus ea possit obtineri, hoc capite breviter indicabo.

Primò igitur accuratè velim distinguantur æquationes, quarum dimensiones sunt numero impares, ab æquationibus, quæ dimensiones habent numero pares. Quemadmodum enim eæ tantùm æquationes tertii gradus resolvi possunt, quæ unam habent radicem realem, & alias duas imaginarias; ita generaliter semper ac resolvenda proponitur æquatio aliqua, cujus dimensiones sunt numero impares, tunc demũ obtineri poterit ejus resolutio, quùm una tantùm radix est realis, & reliquæ omnes imaginariæ sunt: proindeque æquationum, quæ dimensiones habent numero impares, frustra instituitur resolutio, quotiescumque in iis plures, quàm una, radices reales extiterint.

Quantum verò ad æquationes, quæ dimensiones habent numero pares, istæ progrediuntur eâdem omnino lege, qua incedunt æquationes, quæ sunt quatuor dimensionum: nimirum quemadmodum hujusmodi æquationes tunc demum resolvi possunt, quotiescumq; duas habent radices reales,& alias duas imaginarias;ita generaliter semper, ac resolvenda proponitur æquatio aliqua, cujus dimensiones sunt numero pares, tunc tantùm licebit resolutionem ejus obtinere, quùm duæ ipsius radices sunt reales, & aliæ omnes imaginariæ: quocirca æquationum, quæ dimensiones habent numero pares, frustra tentatur resolutio, ubi in iis plures,quàm duæ,radices reales occurrunt.

Verùm, quod hìc, & alibi dictum est, æquationes quarti gradus tunc demum resolvi posse, quotiescùmque duas habent radices reales, & alias duas imaginarias; id velim intelligatur de æquationibus quarti gradus, quæ affectionem cubicam continent. Si enim æquationes quarti gradus immunes fuerint à cubicâ affectione, adeò ut dividi possint in alias duas, in quibus coefficientes terminorum non alias radicales, quàm quadratas contineant; tunc poterit earum resolu-

tio

tio obtineri, etiamsi radices omnes habeant reales. Et generaliter omnis æquatio, quæ dimensiones habet numero pares, si dividi possit in alias duas beneficio radicalium quadratarum, resolvi quandoque poterit, tametsi plures contineat radices reales, quàm duas.

Secundò circa radices æquationũ omniũ hoc velim theorema sciatur, à nemine adhuc adnotatum: nempe, quod radix cujuscumque æquationis, quæ terminis omnibus sit repleta, generaliter tot terminos continere possit, quot sunt dimensiones ipsius æquationis, & non plures, hoc est unum, si æquatio fuerit primi gradus; duos, si secundi; tres, si tertii; quatuor, si quarti; atque ita deinceps. Neque verò inficiamur, posse quandoque pauciores terminos includere. Nam quemadmodum fieri potest, ut in æquatione unus, aut plures ex terminis intermediis deficiant; ita contingere quoque potest, ut in radice ipsius æquationis unus, aut plures ex iis terminis desint.

Jam ex terminis, quos continet radix cujuscumque æquationis, unus debet semper adæquare eam partem quantitatis cognitæ secundi termini, quam ostendit gradus ipsius æquationis; nimirum semis-

missem, si æquatio fuerit secundi gradus; trientem, si tertii; quadrantem, si quarti; atque ita continuò: Ex quo fit, ut si in æquatione desit secundus terminus, tunc itidem in radice terminus ille deficiet. Et quoniam facile est, ex qualibet æquatione secundum terminum tollere; proinde si eas tantùm æquationes resolvendas nobis proponemus, quæ secundo termino carent, radices ipsarum non plures poterunt terminos continere, quàm sunt dimensiones æquationum, unâ demptâ: adeo, ut generaliter erit monomium radix, quæ refertur ad æquationem secundi gradus; binomium radix, quæ respicit æquationem tertii gradus; trinomium radix, quæ eruitur ex æquatione quarti gradus; atque ita deinceps.

Hæc itaque sunt principia, quibus generalem æquationum omnium resolutionem oportet instituere, nec dicere vereor, defectu istorum principiorum, non adhuc fuisse excogitatam in Algebrâ methodum generalem pro resolutione omnium æquationum. Jam ex hisce principiis duplex mihi videtur colligi posse methodus generalis pro resolvendis æquationibus omnibus, quæ quidem sunt ipsissimæ illæ, quas pro resolutione æquationum cubica-

carum superiùs adhibuimus. Utramque hìc explicabimus, sed tam unius, quàm alterius nonnisi in resolutione æquationum quarti gradus, jam aliâ methodo à nobis institutâ, periculum faciemus; nam exigua nostri operis moles non sinit, ut ulteriùs progrediamur; quum in resolvendis æquationibus altioris gradus calculus crescat in immensum.

I.

Prima methodus pro resolvendis æquationibus omnibus explicatur.

PRo generali æquationum omnium resolutione prima methodus ex iis, quas hìc explicandas nobis proposuimus, procedit, assumendo radices æquationis indeterminatè, & componendo ex iis novam æquationem, quas deinde determinat per comparationem novæ istius æquationis cum illâ, de qua agitur. Hæc methodus neminem latuit recentium Algebristarum, sed eam ad æquationes altioris gradus extendere ausus est nemo; quum omnes ignari fuerint illius principii, quod non omnes æquationes resolvi possint analyticè; sed eæ tantùm, quæ vel

bantur reales, tunc illæ nequaquam poterant determinari. Et quamquam beneficio quantitatum imaginariarum, ad hunc quoque casum placuerit methodum extendere; vidimus tamen radices illas sic expressas oriri, ut tametsi reales, quantitates tamen imaginarias involverunt, nec proinde legitimas esse earum radicum expressiones.

Hoc idem ostendemus modò in resolutione æquationum quarti gradus, quam alia methodo superiori capite docuimus. Sit enim $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$ æquatio quarti gradus, & ponamus primò æquationem istã duas habere radices reales, & alias duas imaginarias. Sint $x - a - b = 0$, & $x - a + b = 0$ æquationes simplices, quæ continent radices duas reales, sintque $x + a - \surd - c^2 = 0$, & $x + a + \surd - c^2 = 0$ æquationes simplices, quæ continent radices duas imaginarias. Itaque, quia ex multiplicatione primarum oritur æquatio $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$, & ex multiplicatione secundarũ producitur æquatio $x^2 + 2ax + a^2 + c^2 = 0$, multiplicando rursus per se mutuò duas istas æquationes secundi gradus, prodibit æquatio quatuor dimensionum $x^4 - 2a^2x^2 - b^2x^2 + c^2x^2 - 2ab^2x$ —

$-2ac^2x + a^4 - a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2 = 0$, quæ erit ejuſdem naturæ cum æquatione propoſitâ $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$: proindeque factâ terminorum mutuâ collatione, erit $4p = c^2 - b^2 - 2a^2$, $8q = -2ab^2 - 2ac^2$, & $4r = a^4 - a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2$.

Quia ergo in primâ iſtarum æquationum habetur $4p = c^2 - b^2 - 2a^2$, erit tranſponendo $4p + 2a^2 = c^2 - b^2$, atque adeò multiplicando terminos omnes per $2a$, erit $8pa + 4a^3 = 2ac^2 - 2ab^2$. Et quoniam in ſecundâ habetur $8q = -2ab^2 - 2ac^2$, erit primò per additionem $8pa + 4a^3 + 8q = -4ab^2$, hoc eſt $2pa + a^3 + 2q = -ab^2$, & ſecundò per ſubtractionem $8pa + 4a^3 - 8q = 4ac^2$, hoc eſt $2pa + a^3 - 2q = ac^2$. Quare multiplicatis ſimul duabus hiſce æquationibus, fiet $4p^2a^2 + 4pa^4 + a^6 - 4qq = -a^2b^2c^2$. Erat autem $4p + 2a^2 = c^2 - b^2$; hoc eſt $4pa^4 + 2a^6 = a^4c^2 - a^4b^2$. Itaque adddendo partes iſtius æquationis cũ partibus illius, fiet $4p^2a^2 + 8pa^4 + 3a^6 - 4qq = a^4c^2 - a^4b^2 - a^2b^2c^2$. Quumque in ultimâ æquatione habeatur $4r = a^4 - a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2$, hoc eſt $4ra^2 = a^6 - a^4b^2 + a^4c^2 - a^2b^2c^2$; erit per ſubſtitutionem $4ra^2 = 4a^6 + 4p^2a^2 + 8pa^4$

$8pa^4 - 4qq$, hoc est $a^6 + 2pa^4 + p^2a^2 - ra^2 - qq = 0$.

Itaque quum æquatio ista sit derivativa tertii gradus, facile erit ope ejus quantitatis a valorem invenire: quo utique invento, innotescent quoque valores quantitatum b, & c, quum habeatur $2pa + a^3 + 2q = -ab^2$, & $2pa + a^3 - 2q = ac^2$. Quocirca per hanc methodũ semper poterunt determinari, tum radices duæ reales, cùm radices duæ imaginariæ propositæ æquationis $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$. Neque dicas inventam æquationem $a^6 + 2pa^4 + p^2a^2 - ra^2 - qq = 0$, utpote tertii gradus, non semper resolvi posse; quum si contingat illam existere in propriâ suâ sede, omnesq; radices reales habere, per ea, quæ superiùs ostensa sunt, nequeat resolutio ejus obtineri. Nam notetur velim, casum istum contingere nequaquam posse, quandoquidem posuimus, æquationem quarti gradus $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$ duas habere radices reales, & alias duas imaginarias.

Id autem ut liquidò constet, memoriâ recolendum est, quod si utique æquationis $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$ capiatur æquatio cubica per methodum superiori capite explicatam, hæc semper resolvi pos-

possit, quotiescumque æquatio illa duas habet radices reales, & alias duas imaginarias. Itaque, quia multiplicando radices inventæ æquationis cubicæ $a^6 + 2pa^4 + p^2a^2 - ra^2 - qq = 0$ per numerum quaternarium, habetur loco ejus hæc alia $y^6 + 8py^4 + 16p^2y^2 + 16ry^2 - 64qq = 0$, quæ est ipsissima illa, quæ ex æquatione proposita $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$ methodo superiori capite tradita derivaretur; consequens est, ut in hypothesi, quod æquatio quarti gradus duas habeat radices reales, & alias duas imaginarias, inventa æquatio cubica semper resolvi possit, nec unquam fieri queat, ut in casum incidat irresolutum æquationum cubicarum.

Ponamus secundò, æquationem $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$ radices omnes reales habere. Quem in finem sint $x - a - b = 0$, & $x - a + b = 0$ æquationes simplices, quæ continent duas ex radicibus illis; sintq; $x + a - c = 0$, & $x + a + c = 0$ æquationes simplices, quæ alias duas radices comprehendunt. Itaque, quia productum ex primis est $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$, & productum ex secundis est $x^2 + 2ax + a^2 - c^2 = 0$; erit $x^4 - 2a^2x^2 - b^2x^2 - c^2x^2 - 2ab^2x + 2ac^2x + a^4$ —

$- a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2 = 0$ æquatio quarti gradus, ad quam radices illæ referuntur. Unde, quum ista sit ejusdem naturæ cum æquatione propositâ $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$, factâ terminorum collatione mutuâ, invenietur $4p = - 2a^2 - b^2 - c^2$, $8q = 2ac^2 - 2ab^2$, & $4r = a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2$.

Quia igitur in primâ istarum æquationum habetur $4p = - 2a^2 - b^2 - c^2$, erit transponendo $4p + 2a^2 = - b^2 - c^2$, atque adeò multiplicando terminos omnes per $2a$, erit $8pa + 4a^3 = - 2ab^2 - 2ac^2$. Et quoniam in secundâ habetur $8q = 2ac^2 - 2ab^2$, erit primò per additionem $8pa + 4a^3 + 8q = - 4ab^2$, hoc est $2pa + a^3 + 2q = - ab^2$, & secundò erit per subtractionem $8pa + 4a^3 - 8q = - 4ac^2$, hoc est $2pa + a^3 - 2q = - ac^2$. Quare multiplicatis simul duabus hisce æquationibus, fiet $4p^2a^2 + 4pa^4 + a^6 - 4qq = a^2b^2c^2$. Erat autem $4p + 2a^2 = - b^2 - c^2$, hoc est $4pa^4 + 2a^6 = - a^4b^2 - a^4c^2$. Itaque addendo partes istius æquationis cum partibus illius, fiet $4p^2a^2 + 8pa^4 + 3a^6 - 4qq = a^2b^2c^2 - a^4b^2 - a^4c^2$. Quumq; in ultimâ æquatione habeatur $4r = a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2$, hoc est $4ra^2 = a^6 - a^4b^2 -$

a^4c^2

$a^4c^2 + a^2b^2c^2$, erit per substitutionem $4ra^2 = 4a^6 + 4p^2a^2 + 8pa^4 - 4qq$, hoc est $a^6 + 2pa^4 + p^2a^2 - ra^2 - qq = 0$.

Itaque quum æquatio ista sit quidem derivativa tertii gradus, sed sit illa eadem, quæ inventa est paulò ante, quum æquatio proposita $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$ duas ponebatur habere radices reales, & alias duas imaginarias; perspicuum est, ope ejus nequaquam posse inveniri valorem quantitatis a, neque ideò determinari posse radices propositæ æquationis. Si enim ex æquatione propositâ eruamus æquationem cubicam methodo superiori capite traditâ, hæc, ut ibidem ostensum est, incidit in casum irresolutum æquationum cubicarum, quotiescumque æquatio illa radices omnes reales habet. Itaque, quia inventa æquatio cubica $a^6 + 2pa^4 + p^2a^2 - ra^2 - qq = 0$ transformatur in eam, quæ aliâ illâ methodo derivaretur, si utique radices ejus multiplicentur per numerum quaternarium; consequens est, ut in hypothesi, quod æquatio proposita omnes radices reales habeat, inventa æquatio cubica incidat quoque in casum irresolutum æquationum cubicarum, nec ideo resolutio ejus possit obtineri.

Vi-

Vides ergo, per hanc methodum, semper quidem resolvi posse æquationes quarti gradus, quum duas habent radices reales, & alias duas imaginarias; sed non item, quum in iis radices omnes sunt reales. Cæterùm hìc quoque notetur velim, in inventâ æquatione cubicâ quantitatem *a* duplicatas habere dimensiones ob tria illa, quæ contingere possunt in æquationibus quarti gradus: indeque est, ut cubica illa æquatio inveniatur quoque, quum æquationis quarti gradus radices omnes reales supponuntur. Nam tametsi æquatio quarti gradus, quæ radices omnes reales habet, resolvi nequeat, quum existit in propriâ suâ sede, & affectionem cubicam continet; attamen resolutio ejus semper potest obtineri, si in duas secundi gradus sit divisibilis, vel naturâ suâ, vel etiam beneficio radicalium quadratarum.

Itaque qui per hanc methodum resolutionem æquationem altioris gradus tentare velit, is radices ponat oportet tales quidem, quales esse debent, ut æquatio, de qua agitur, resolvi possit. Ita quia æquationes quinti gradus unam tantùm radicem realem habere debent, quò ipsarum resolutio possit obtineri, cogitandum est, æquationes illas ortas esse ex mu-

tuâ multiplicatione iſtarum æquationum $x^2 + 2ax + a^2 + b^2 = 0$, $x^2 + 2cx + c^2 + d^2 = 0$, & $x - 2a - 2c = 0$; quandoquidem in duabus primis continentur quatuor radices imaginariæ, in tertia verò radix realis includitur. Atque ita quoque, quia æquationes ſexti gradus tunc demum reſolvi poſſunt, quum duas habent radices reales; proinde in illarum reſolutione, putandum eſt, eas ortas eſſe ex multiplicatione mutuâ iſtarum æquationum $x^2 + 2ax + a^2 + b^2 = 0$, $x^2 + 2cx + c^2 + d^2 = 0$, & $x^2 - 2ax - 2cx + a^2 + 2ac + c^2 - f^2 = 0$, nam duæ primæ continent quatuor radices imaginarias, tertia verò radices duas reales comprehendit.

Verum quidem eſt, in æquationibus, quarum dimenſiones ſunt numero pares, id quod invenitur in hypotheſi, quod duas tantùm habeant radices reales, poſſe etiam in quacunque aliâ hypotheſi reperiri. Sed id non aliunde fit, quàm quia in hujuſmodi æquationibus varia contingere poſſunt, quibus oportet, ut æquè ſatisfiat per analyſim, quemadmodum videre licet in æquationibus quarti gradus. Res autem longè ſecus comperietur in æquationibus, quæ dimenſiones habent im-

impares numero. In iſtis ſiquidem tunc tantùm methodus procedet, quum una dumtaxat radix aſſumitur realis, & tametſi beneficio quantitatum imaginariarum ad alios quoque caſus poſſet methodus extendi, attamen eventus perinde erit, ac in reſolutione æquationum cubicarum, nimirum radix ſubinde orietur expreſſa, ut etſi realis, quantitates tamen imaginarias involvet.

II.
Altera methodus reſolvendi æquationes omnes aperitur.

Altera methodus pro reſolutione æquationum omnium, procedit inquirendo valorem unius tantummodo radicis, quam etiam indeterminatam aſſumit. Hac methodo uſi ſunt Itali in reſolutione æquationum cubicarum, quam deinde alii etiam uſurparunt. Sed ea ad reſolutionem æquationum altioris gradus à nemine huc uſque promota fuit, quia nemini innotuit theorema illud, quod radix realis cujuſcumque æquationis, quæ ſecundo termino caret, tot terminos generaliter debeat continere, quot ſunt dimenſiones æquationis, unâ demptâ.

Itaque, qui per hanc methodum æquationes omnes resolvere cupit, is radicem, quam quærit, ita quidem assumere debet indeterminatè, ut tamen tot terminis constet, quot sunt dimensiones æquationis, de qua agitur, unâ demptâ: adeo ut quemadmodum in resolutione æquationum cubicarum ponitur $x = a + b$, ita in resolutione æquationum quarti gradus ponendum sit $x = a + b + c$, & $x = a + b + c + d$ in resolvendis æquationibus quarti gradus, atque ita deinceps.

Quum sic proceditur in resolutione æquationum semper quantitas a, quæ designat primum terminum radicis extrahendæ, invenitur per æquationem unâ dimensione minorem illâ, quæ resolvenda proponitur: nimirum per æquationem quadratam, si proposita fuerit tertii gradus; per æquationem cubicam, si proposita fuerit quarti gradus; per æquationẽ quadrato-quadratam, si proposita fuerit quinque dimensionum, atque ita deinceps: adeo ut æquatio, exempli gratiâ, noni gradus resolvi non poterit, nisi priùs fuerit resoluta æquatio gradus octavi.

Determinatâ quantitate a, quantitates reliquæ determinabuntur per æquationes

nes adhuc simpliciores, nimirum secunda per æquationem duplici dimensione minorem, tertia per æquationem tribus dimensionibus minorem, atque ita continuò: unde per hanc methodum æquatio cujuscumque gradus resolvi nequaquam poterit, nisi prius innotuerit, qua ratione resolvi debeant æquationes omnes, quæ sub gradu illo continentur: adeo ut in resolvendis æquationibus, nisi gradatim procedatur, nihil beneficio hujus methodi profici poterit.

Sed videamus modò, qua ratione per hanc methodum resolutio æquationum institui debeat. Id in æquationibus cubicis jam superiùs à nobis præstitum est; sed ut artificium hujus methodi paulò clariùs intelligatur, non gravabimur earum resolutionem hìc denuò proferre. Sit igitur $x^3 = 3px + 2q$ æquatio cubica resolvenda. Ponatur $x = a + b$. Erit itaque $x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; adeoque quum sit ex hypothesi $x^3 = 3px + 2q$, erit $3px + 2q = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Unde eò res redit, ut ex cubo radicis binomiæ $a + b$ separentur termini, qui æquari debent $3px$, à terminis, qui æqualitatem servare debent cum $2q$.

Hæc separatio, ut rectè fiat, notare priùs oportet, quod quum $2q$ sit quantitas omnino rationalis, & $3px$ contineat quantitatem radicalem x; radix binomia $a \mp b$ talis esse debeat, ut cubus ejus duabus similiter partibus constet, quarum una sit omnino rationalis, altera contineat quantitatem radicalem $a \mp b$, cui ex hypothesi est æqualis incognita x. Sic enim prior pars omninò rationalis æquabitur $2q$, pars verò altera, in qua continetur quantitas radicalis $a \mp b$, ponenda erit æqualis $3px$.

Ut autem radix binomia $a \mp b$ hunc præstet effectum, perspicuum est, quantitates a, & b debere esse radicales cubicas, & tales quidem, ut id, quod est sub signo radicali in unâ, sit quadrata radix ejus, quod sub eodem signo radicali reperitur in alterâ. Hac siquidem ratione termini duo $a^3 \mp b^3$, utpote cubi quantitatum a, & b, constituent partem rationalem, quæ æquari debet cum $2q$; at verò alii duo termini $3a^2b \mp 3ab^2$, quia oriuntur multiplicando quantitatem rationalem $3ab$ per radicalem $a \mp b$, constituent partem alteram, quæ poni debet æqualis $3px$.

Habemus itaque duas æquationes $3ab$

$= 3p$, & $a^3 + b^3 = 2q$, quarum ope facilè modò erit determinare quantitates a, & b. Est enim in primâ $3ab = 3p$, hoc est $ab = p$. Itaque elevando utramque partem ad cubum, erit $a^3b^3 = p^3$. Et quoniam in secunda habetur $a^3 + b^3 = 2q$; multiplicando terminos omnes per a^3, erit $a^6 + a^3b^3 = 2qa^3$; adeoque si loco a^3b^3 ponatur valor ejus p^3, fiet $a^6 + p^3 = 2qa^3$, hoc est $a^6 - 2qa^3 + p^3 = 0$, quæ quum sit derivativa secundi gradus, haud difficile erit ope ejus valorem quantitatis a determinare: quo utique cognito, innotescet quoque valor alterius b, quum habeatur $ab = p$.

Hanc eandem methodum applicemus modò æquationibus quarti gradus. Sit ergo $x^4 = 4px^2 + 8qx + 4r$ æquatio quarti gradus resolvenda. Ponatur $x = a + b + c$. Erit itaque $x^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + 4a^3c + 12a^2bc + 12ab^2c + 4b^3c + 6a^2c^2 + 12abc^2 + 6b^2c^2 + 4ac^3 + 4bc^3 + c^4$; adeoque quum sit ex hypothesi $x^4 = 4px^2 + 8qx + 4r$, erit $4px^2 + 8qx + 4r = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + 4a^3c + 12a^2bc + 12ab^2c + 4b^3c + 6a^2c^2 + 12abc^2 + 6b^2c^2 + 4ac^3 + 4bc^3 + c^4$. Unde eò res redit, ut ex quadrato-quadrato radicis trino-

miæ

miæ $a + b + c$ separentur termini, qui æquari debent $4r$, tam à terminis æquandis cum $4px^2$, quàm à terminis, qui æqualitatem servare debent cum $8qx$.

Hæc similiter separatio ut rectè fiat, notare prius oportet, quod quum $4r$ sit quantitas omnino rationalis, $8qx$ contineat quantitatem radicalem x, & $4px^2$ ejusdem quantitatis radicalis quadratum comprehendat; radix trinomia $a + b + c$ talis esse debeat, ut ejus quadrato-quadratum tribus similiter partibus constet, quarum una sit omnino rationalis, altera contineat quantitatem radicalem $a + b + c$, cui ex hypothesi est æqualis incognita x, & tertia contineat quadratum ejusdem quantitatis radicalis. Sic enim pars prior æquabitur $4r$, pars altera æquabitur $8qx$, & pars tertia ponenda erit æqualis $4px^2$.

Sed perspicuum est, quod ut radix trinomia $a + b + c$ hunc præstet effectum, quantitates a, b, c debeant esse radicales quadrato-quadratæ, & tales quidem, ut id, quod est sub signo radicali in unâ, veluti in a, sit radix quadrata ejus, quod est sub signo radicali in altera, puta in b, & radix cubica illius, quod sub eodem signo radicali reperitur in tertia c. Hac enim ratione semper in quadrato-quadra-

to

to illius radicis trinomiæ $a+b+c$ distinguere licebit tres partes, quarum una sit omninò rationalis, altera contineat radicalem $a+b+c$, & tertia quadratum ejusdem radicalis comprehendat.

Pars quippe, quæ continet radicalem $a+b+c$, erit $4a^3b+4a^2b^2+4a^2bc+4abc^2+4b^2c^2+4bc^3$, quum oriatur, multiplicando quantitatem rationalem $4a^2b+4bc^2$ per $a+b+c$. Pars verò, quæ continet quadratum ejusdem radicalis $a+b+c$, erit $2a^2b^2+4ab^3+2b^4+8ab^2c+4b^3c+2b^2c^2+4a^3c+8a^2bc+8a^2c^2+8abc^2+4ac^3$; quum producatur, multiplicando quantitatem rationalem $2b^2+4ac$ per quadratum, quod fit ex $a+b+c$. Et denique pars omninò rationalis est $a^4+c^4-b^4-2a^2c^2+4b^2ac$, quæ unà cum duabus primis constituit quadrato-quadratum radicis trinomiæ $a+b+c$.

Discretis à se mutuò tribus istis partibus, habebimus totidem æquationes, nimirum $4a^2b+4bc^2=8q$, $2b^2+4ac=4p$, & $a^4+c^4-b^4-2a^2c^2+4b^2ac=4r$, quarum ope facile erit definire valores quantitatum a, b, c. Est enim in secundâ $2b^2+4ac=4p$, hoc est $4b^2ac=4pb^2-2b^4$. Itaque in tertiâ æquatio-

tione $a^4 + c^4 - b^4 - 2a^2c^2 + 4b^2ac = 4r$, si loco $4b^2ac$ ponatur valor iste $4pb^2. -2b^4$, prodibit loco ejus hæc alia $a^4 + c^4 - 3b^4 - 2a^2c^2 + 4pb^2 = 4r$, sive etiam $a^4b^2 + c^4b^2 - 3b^6 - 2a^2c^2b^2 + 4pb^4 = 4rb^2$.

Et quoniam in primâ æquatione habetur $4a^2b + 4bc^2 = 8q$, hoc est $a^2b + bc^2 = 2q$; elevando utramque partem ad quadratum, erit $a^4b^2 + 2a^2c^2b^2 + c^4b^2 = 4qq$, hoc est $a^4b^2 + c^4b^2 = 4qq - 2a^2c^2b^2$: proindeque si in æquatione illâ, in quam mutata est tertia, loco $a^4b^2 + c^4b^2$ ponatur $4qq - 2a^2c^2b^2$, fiet $4qq - 3b^6 - 4a^2c^2b^2 + 4pb^4 = 4rb^2$. Et denique, quia ex secundâ æquatione eruitur $4a^2c^2b^2 = 4p^2b^2 - 4pb^4 + b^6$, ponendo in eadem æquatione loco $4a^2c^2b^2$ valorem istum, habebitur $4qq - 4b^6 - 4p^2b^2 + 8pb^4 = 4rb^2$, hoc est $b^6 - 2pb^4 + p^2b^2 + rb^2 - qq = 0$.

Quum itaq; æquatio ista ita quidem ad sex dimensiones ascendat, ut tamen derivativa tertii gradus dicenda sit, haud difficilè erit ope ejus quantitatis b valorem invenire. Hoc autem invento valores quantitatum a, & c in promptu erunt. Habetur enim in primâ illarum æquationum $4a^2b + 4bc^2 = 8q$, hoc est

$4a^4b$

$4a^4b + 4ba^2c^2 = 8qa^2$. Itaque, quum in secundâ habeatur $2ac = 2p - b^2$, hoc est $4ba^2c^2 = 4p^2b - 4pb^3 + b^5$; fiet per substitutionem $4a^4b + 4p^2b - 4pb^3 + b^5 = 8qa^2$, quæ ordinata juxta dimensiones litteræ a ita quidem ad quatuor dimensiones attollitur, ut tamen derivativa secundi gradus dici debeat. Et denique invento valore quantitatis a, determinabitur valor alterius c per æquationem simplicem $2ac = 2p - b^2$.

Eâdem omninò methodo instituenda est resolutio æquationum altioris gradus: nimirum æquationis, de qua agitur, assumptâ radice ita quidem indeterminatè, ut tot terminis constet, quot sunt dimensiones æquationis, unâ demptâ, fiat ex radice illâ potestas, æquationis gradui correspondens; hoc est quadrato-cubus, si æquatio fuerit quinque dimensionum; cubo-cubus, si æquatio ad sex dimensiones ascendat; atque ita deinceps. Deinde in hac potestate distinguantur à se mutuò partes, quæ æquationis terminis sub alternis correspondent, & per comparationem istarum partium cum terminis illis, habebuntur totidem æquationes, quot requiruntur ad determinandas quantitates, quæ in assumptâ æquationis radice continentur. Quia

Quia verò totum hujus methodi artificium in eo potissimùm situm est, ut in potestate, quæ fit ex assumptâ radice juxta gradum æquationis, distinguantur à se mutuò partes, quæ correspondent æquationis terminis subalternis; proinde nolim hìc silentio præterire præclarum istud theorema, quod radix realis cujuscumque æquationis, quæ secundo termino caret, non modò tot terminos comprehendat, quot sunt dimensiones æquationis, unâ demptâ, verùm etiam, quod termini illi debeant esse radicales ejus gradus, ad quem ascendit æquatio, & tales quoque, ut id, quod est sub signo radicali in termino primo, sit quadrata radix ejus, quod est in secundo; cubica illius, quod est in tertio; quadrato-quadrata ejus, quod est in quarto; atque ita deinceps.

Hujus namque theorematis ope, haud difficilè erit in quacumque potestate partes illas à se mutuò distinguere; nam ejus beneficio facilè apparebit, quæ quantitates sint rationales, quæve secus. Illud unum monitum hìc volo, quod tametsi generaliter termini, ex quibus constat radix æquationis, debeant esse radicales ejus gradus, ad quem ascendit æquatio, fieri

fieri tamen possit, ut unus, aut plures ex iis sint radicales gradus inferioris, quia fortè ad illas deprimi possunt. Sic ex tribus partibus a, b, c, ex quibus constat radix æquationis quarti gradus, nonnisi duæ extremæ a, & c sunt radicales quadrato-quadratæ; nam media b est tantùm radicalis quadrata, quia id, quod continetur sub signo ejus, est quadratum illius, quod comprehenditur sub signo in parte priori a.

Atque hac ratione factum, ut in definiendis quantitatibus a, b, c, quibus radix æquationis quarti gradus designatur, non a, sed b primo locò determinaverimus. Si enim definienda prius erat a, quia quantitas ista est radicalis quadrato-quadrata, oriebatur quidem æquatio derivativa tertii gradus, sed ad duodecim dimensiones naturâ suâ ascendebat; quum tamen in determinandâ quantitate b, quæ est tantùm radicalis quadrata, comperta fuit æquatio, ita quidem derivativa tertii gradus, ut ad sex tantùm dimensiones ascenderet: quæ quidem æquatio est ipsissima illa, quæ priori æquationes resolvendi methodo nobis sese obtulit.

Qua-

III.

Qua ratione limites radicum cujuſcumque æquationis inveniantur, explicatur.

AD generalem æquationum omnium reſolutionem ſpectat etiã inventio limitũ, quibus radices cujuſcumq; æquationis continentur. Nam etſi hac ratione veri earum radicum valores nobis non innoteſcant; dubitari tamen nequit, quin eos præter propter aſſequi liceat. Id igitur obtineri poteſt methodo ſuperiùs traditã pro inveniendo limite, quem radices nullæ transgrediantur. Etſi enim beneficio illius methodi videatur dumtaxat inveniri poſſe limes pro maximâ radice æquationis; quia tamen radix quælibet, augendo, vel minuendo radices omnes, fieri poteſt minima, deinde minima converti in maximam, facilè erit, eandem methodum ad radices omnes applicare. Interim, quia methodus illa, ob difficilem calculum, non tam videtur ad praxim expedita, quin etiam dumtaxat locum ſibi vindicat in æquationibus, quæ nullas habent radices imaginarias, proinde aliâ

aliâ ratione limites, intra quos continentur radices cujuscumque æquationis, invenire docebimus, quæ nimirum, & facilior sit, & ad omnes æquationes se extendat.

Alterius autem hujus methodi summa hæc est: multiplicentur termini æquationis propositæ per numeros dimensionum, quas in illis habet incognita, & ex iis, qui oriuntur, nova formetur æquatio, quæ dividi semper poterit per incognitam, quum ultimus terminus prioris æquationis multiplicari debeat per zero, sive nihilum, utpote qui nullas continet incognitæ dimensiones. Deinde novæ hujus æquationis multiplicentur adhuc termini omnes per numeros dimensionum, quas in ipsis tenet incognita, & ex iis, qui prodeunt, nova itidem formetur æquatio, quæ ob eandem rationem etiam semper dividi poterit per incognitam. Et sic multiplicando continuò per numeros dimensionum terminos subortæ æquationis, novamque per incognitam dividendo, pergatur donec tandem æquatio occurrat linearis.

Omnes istæ æquationes, quæ sic per multiplicationem, divisionemque ex propositâ æquatione deductæ sunt, unà

cum ipsâ æquatione propositâ, ostendent nobis limites, intra quos continentur radices æquationis tam positivæ, quàm negativæ: unde non immeritò æquationes limitum poterũt appellari. Qui enim numerus positivus scriptus loco incognitæ in singulis illis æquationibus efficit, ut summa ex terminis cujuscumque æquationis sit ubique positiva; is erit major omni radice positivâ æquationis, adeoque limes, quem nulla ex radicibus positivis transgredietur. Qui verò numerus negativus, scriptus in iisdem æquationibus incognitæ loco, efficit, ut summa terminorum sit positiva in æquationibus, quæ dimensiones habent numero pares, & negativa in iis, quæ dimensiones habent impares numero; is erit major omni radice negativâ æquationis, adeoque limes, quem nulla ex radicibus negativis prætеribit.

Exempli loco proponatur æquatio $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$. Multiplicentur ejus termini omnes per numeros dimensionum, quas in iis habet incognita x, eritque nova æquatio $5x^5 - 8x^4 - 30x^3 + 60x^2 + 63x = 0$, quæ siquidem dividatur per x, fiet $5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63 = 0$.

$= 0$. Alterius hujus æquationis multiplicentur adhuc termini omnes per numeros dimensionum incognitæ, & divisis prodeuntibus per x, habebitur nova æquatio $20x^3 - 24x^2 - 60x + 60 = 0$, quæ fiet $5x^3 - 6x^2 - 15x + 15 = 0$, si quisque terminus dividatur per 4. Ex novâ istâ æquatione per similem terminorum multiplicationem, divisionemque orietur hæc alia $15x^2 - 12x - 15 = 0$, sive $5x^2 - 4x - 5 = 0$; atque ex hac tandem habebitur æquatio linearis $10x - 4 = 0$, hoc est $5x - 2 = 0$.

Itaque ex propositâ æquatione $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$ deductæ sunt quatuor aliæ æquationes, quarum prima est $5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63 = 0$, secundâ $5x^3 - 6x^2 - 15x + 15 = 0$, tertia $5x^2 - 4x - 5 = 0$, & quarta, sive postrema $5x - 2 = 0$: proindeque ad indagandum limitem, intra quem continentur omnes radices positivæ propositæ æquationis, tentandum est, quinam numerus positivus, scriptus in iis quinque æquationibus loco incognitæ x, efficiat, ut summa terminorum omnium sit ubique positiva. Et quoniam tentando unitatem, fit quidem $5x - 2 = 3$, sed $5x^2 - 4x - 5 = -4$;

limes quæſitus major erit, quàm 1. Itaque tentandus eſt numerus aliquis unitate major; quumque tentando binarium, fit in ſingulis æquationibus ſumma terminorum poſitiva, erit numerus 2 major unaquaque radice poſitivâ.

Ad indagandum verò limitem, intra quem continentur radices omnes negativæ ejuſdem æquationis, inquirendum eſt, quinam numerus negativus, ſcriptus in iiſdem quinque æquationibus loco incognitæ x, efficiat, ut ſumma terminorum omnium ſit poſitiva in æquationibus, quæ dimenſiones habent numero pares, & negativa in iis, quæ dimenſiones habent impares numero. Et quoniam nec -1, nec -2 hunc præſtat effectum, tento -3. Itaque quia poſito -3 loco incognitæ x fit $5x - 2 = -17$, $5xx - 4x - 5 = 52$, $5x^3 - 6x^2 - 15x + 15 = -129$, $5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63 = 234$, & $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = -274$, hoc eſt ſumma terminorum in æquationibus parium dimenſionum prodit poſitiva, in æquationibus dimenſionum imparium prodit negativa; erit -3 limes, quem nulla ex radicibus negativis præteribit.

præ-

Vides ergo per hanc methodum, limites, intra quos continentur radices tum positivæ, cum negativæ cujuscumque æquationis, ita quidem determinari, ut radices maximas neque etiam unitate excedant. Quocirca si augendo, vel minuendo radices æquationis propositæ, quælibet radix fiat minima, tum ex minimâ convertatur in maximam; jam licebit per hanc methodum cujuscumque radicis talem limitem invenire, ut radice ipsâ sit proximè major, neque eam excedat unitate. Et siquidem idem limes unitate minuatur, habebitur limes alter proximè minor, qui neque etiam unitate à radice ipsâ deficiet. Sic æquationis $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$ maxima radix positiva est inter 1, & 2; maxima verò radix negativa est inter -2, & -3.

Hujus artificii pro limitibus inveniendis ratio pendet à methodo radicum æqualiū, superiùs à nobis ostensâ. Si enim æquatio proposita omnes habeat radices æquales, jam aliæ æquationes limitum, quæ exinde derivantur, pro numero suarum dimensionū easdem radices æquales continebunt. Quocirca, si radices illæ fuerint positivæ, omnis numerus positivus,

 qui

qui scriptus in singulis illis æquationibus efficit, ut summa terminorum non evanescat, sed ubiq; prodeat positiva, erit major radicibus illis. At verò, si radices fuerint negativæ, erit iis major omnis numerus negativus, qui scriptus incognitæ loco efficit, ut summa terminorum sit positiva in æquationibus, quæ dimensiones habent numero pares, & negativæ in æquationibus, quæ dimensiones habent impares numero.

Quum ex radicibus æquationis, vel nullæ, vel non omnes sunt æquales, utiq; aliæ æquationes limitū pro numero suarū dimensionum radices easdem non continebunt. Sed nihilominus unaquæque ex radicibus ipsarum non excedet æquationis propositæ radicem maximam ejusdem speciei. Unde si maxima ista radix fuerit positiva, quemadmodum omnis numerus positivus eâ major efficit, ut in æquatione propositâ summa terminorum sit positiva, ita idem numerus præstabit hoc idem in aliis æquationibus limitum. Et quemadmodum si maxima illa radix fuerit negativa, omnis numerus negativus eâ major efficit, ut summa terminorum propositæ æquationis fit positiva, si dimensiones habeat numero pares, & ne-

ga-

gativa, si dimensiones habeat impares numero; ita idem mumerus in aliis æquationibus limitum eundem pariet effectum.

Jam cognitis limitibus, intra quos consistit radix æquationis, licebit per hanc methodum ad veram impossibilem propiùs semper, ac propiùs appropinquare. Sit $x^3 - 2x - 5 = 0$ æquatio proposita, quia limes proximè minor maximæ radicis positivæ est 2, pono $2 + p = x$, & substituto in æquatione loco x hoc ejus valore, nova prodibit æquatio $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, neglectisque terminis $p^3 + 6p^2$, ob parvitatem ipsius p, fiet $10p - 1 = 0$, adeoque assumpta quantitas p ampliùs, quàm unam decimam adæquabit. Unde rursus si decima ista una cum q ponatur æqualis p, & debitis substitutionibus peractis, quantitatis q valor propè veritatem inveniatur, propiùs appropinquabitur ad valorem ipsius p, & consequenter ad valorem incognitæ x.

Potest etiam ad verum valorem incognitæ appropinquari, adhibendo limitem proximè majorem. Sic in eadem æquatione $x^3 - 2x - 5 = 0$ limes proximæ major maximæ radicis positivæ est 3. Itaque pono $3 - p = x$, & substi-

tuto in æquatione loco incognitæ x hoc ejus valore, prodibit hæc alia $p^3 - 9p^2 + 25p - 16 = 0$, sive etiam $25p - 16 = 0$, neglectis terminis $p^3 - 9p^2$ ob parvitatem ipsius p: unde quantitas p circiter duas tertias unitatis adæquabit. Ponatur deinde valor iste unà cum q æqualis p, & siquidem factis debitis substitutionibus, inveniatur eadem methodo valor quantitatis q prope veritatem, appropinquabitur propiùs ad valorem ipsius p, atque adeo ad valorem incognitæ x.

Quoniam autem in hac methodo termini nonnulli negliguntur in inveniendis quantitatibus p, q &c., fieri quandoque potest, ut valor assumptæ quantitatis prodeat negativus, atque adeo tantùm absit, ut ad verum valorem appropinquetur, ut potiùs ab eo discedamus. Id quum accidit, nolim animo concidatis; tum quia fieri potest, ut id, quod antea lucratum est, sit justo majus, atque adeò restituatur per novum valorem negativum; tum etiam quia id, quod in eâ operatione fit jacturæ, potest in operationibus sequentibus lucrari. Instituatur ergo pluries, ac pluries hæc operatio, & ad veram radicem impossibilem propo-

sitæ

ſitæ æquationis propiùs ſemper, ac propiùs appropinquabitur.

Cæterùm hæc methodus inveniendi limites, intra quos conſiſtunt radices æquationis, & ad veros earum valores appropinquandi, locum ſibi vindicat tantùm in æquationibus numericis: unde ſi æquationes propoſitæ fuerint litterales, neceſſe eſt loco litterarum ponere valores numericos, quò iis poſſit hæc methodus applicari. Interim, quia æquationes litterales excidunt univerſalitate ſuâ, quum in iis loco litterarum numeri ſubſtituuntur; proinde aliam hìc methodum exhibebimus reſolvendi per approximationem æquationes litterales, nimirum ope ſerierum infinitarum, de quibus fusè actum eſt libro primo.

IV.

Qua ratione æquationes litterales reſolvi poſſint per ſeries infinitas, oſtenditur.

UT æquationes litterales reſolvi poſſint beneficio ſerierum infinitarum, aſſumenda eſt ſeries aliqua indeterminata, eaque ponenda æqualis incognitæ quantitati, quæ in æquatione continetur. Hu-

Hujus autem seriei termini duo quidem debent continere; primo nempè potestates unius ex litteris cognitis propositæ æquationis, quæ tales esse debent, ut earum exponentes progressionem constituant arithmeticam, ipsique adeò seriei termini ratione earundem potestatum progressionem componant geometricam; & secundo litteras quasdam indeterminatas pro suis coefficientibus, quas tamen confusionis vitandæ gratiæ assumere oportet diversas ab iis, quæ in æquatione propositâ continentur.

Hac ratione si x fuerit incognita æquationis, & m una ex litteris cognitis, quæ in eadem æquatione continentur, supponendum est $x = am^0 + bm^1 + cm^2 + dm^3 + em^4 + fm^5$ &c., in cujus quidem seriei terminis, præter potestates litteræ m, quarum exponentes constituunt progressionem arithmeticam, continentur etiam litteræ a, b, c, d, e, f &c., quas suppono diversas esse ab iis, quæ reperiuntur in æquatione propositâ. Et notetur hoc loco velim, quod primus seriei terminus am^0 idem valeat, ac a; nam m^0 veluti potestas, cujus exponens est zero, sive nihil, tantundem valet, ac unitas, quum sit primus terminus progressionis geometri-

cæ

cæ m^{0}, m^{1}, m^{2}, m^{3} &c.

Aſſumptâ ſerie iſtâ indeterminatâ pro valore incognitæ x, eò deinde res redit, ut coefficientes terminorum ejuſdem ſeriei determinentur, quò ſcilicet & ipſa ſeries evadat determinata. Id autem obtinebitur, ſi ſcribatur in ipsâ æquatione ſeries illa loco incognitæ x, ejus quadratum loco x^{2}, ejus cubus loco x^{3}, atque ita deinceps. Quum enim hac ratione prodeat æquatio infinita, cujus termini ſunt diſtinguendi ſecundùm dimenſiones illius litteræ, cujus poteſtates continent termini aſſumptæ feriei; ſi utique ponatur quiſque terminus novæ hujus ſeriei æqualis zero, ſive nihilo, habebuntur totidem æquationes ſpeciales, quarum ope facile erit coefficientes illos determinare.

Demus hujus rei exemplū in æquationibus quadratis. Proponatur æquatio litteralis ſecundi gradus $x^{2} - 2mx - n^{2} = 0$, & oporteat valorem incognitæ x per ſeriem infinitam invenire. Ponatur $x = am^{0} + bm^{1} + cm^{2} + dm^{3} + em^{4} + fm^{5}$ &c., hoc eſt $x = a + bm + cm^{2} + dm^{3} + em^{4} + fm^{5}$ &c. Erit itaque $x^{2} = a^{2} + 2abm + b^{2}m^{2} + 2acm^{2} + 2adm^{3} + 2bcm^{3} + c^{2}m^{4} + 2bdm^{4} + 2aem^{4} + 2cdm^{5} + 2bem^{5} + 2afm^{5}$ &c., & $-2mx = -2am - 2bm^{2}$

—

$- 2cm^3 - 2dm^4 - 2em^5 - 2fm^6$ &c. Unde subrogatis valoribus hisce in æquatione propositâ $x^2 - 2mx - n^2 = 0$, distinctisq; terminis novæ æquationis secundum dimensiones litteræ m, habebitur $a^2 - n^2 + 2abm - 2am + b^2m^2 + 2acm^2 - 2bm^2 + 2adm^3 + 2bcm^3 - 2cm^3 + c^2m^4 + 2bdm^4 + 2aem^4 - 2dm^4 + 2cdm^5 + 2bem^5 + 2afm^5 - 2em^5$ &c. $= 0$.

Ponatur unusquisque terminus novæ hujus æquationis æqualis zero, sive nihilo: qua ratione sequentes habebuntur æquationes $a^2 - n^2 = 0$, $2ab - 2a = 0$, $b^2 + 2ac - 2b = 0$, $2ad + 2bc - 2c = 0$, $c^2 + 2bd + 2ae - 2d = 0$, $2cd + 2be + 2af - 2e = 0$ &c. Et quoniam in primâ istarum æquationum habetur $a^2 - n^2 = 0$, erit $a^2 = n^2$, atque adeo $a = n$. Quumque in secundâ æquatione habeatur $2ab - 2a = 0$, erit $2ab = 2a$, ac proinde $b = 1$. Unde, quum in tertiâ æquatione sit $b^2 + 2ac - 2b = 0$, substitutis in eâ valoribus ipsarum a, & b jam inventis, fiet $2nc - 1 = 0$, hoc est $c = \frac{1}{2n}$. Atque ita quoque invenietur in

quar-

quartâ æquatione $d = 0$, in quintâ $e = -\frac{1}{8n^3}$, atque ita deinceps. Quocirca assumpta series $a + bm + \frac{cm^2}{m^2} + \frac{dm^3}{m^4} + \frac{em^4}{m^4} + \frac{fm^5}{m^5}$ &c. fiet $n + m + \frac{\quad}{2n} - \frac{\quad}{8n^3}$ &c. evanescentibus terminis, ubi reperitur m^3, m^5, m^7, &c.

Possunt etiam in terminis assumptæ seriei, poni potestates litteræ n; sed hoc in casu tollendus est primò ex æquatione secundus terminus, locoque ejus resolvenda hæc alia $y^2 - m^2 - n^2 = 0$. Ad quam item resolvendam, non quidem poni debet $y = a + bn + cn^2 + dn^3 + en^4 + fn^5$ &c., sed $y = a + bn^2 + cn^4 + dn^6 + en^8 + fn^{10}$ &c., quorum omnium rationes facilè intelliget, quicumque velit contrarii periculum facere. Jam ponendo $y = a + bn^2 + cn^4 + dn^6 + en^8 + fn^{10}$, fiet $y^2 = a^2 + 2abn^2 + b^2n^4 + 2acn^4 + 2adn^6 + 2bcn^6 + 2aen^8 + c^2n^8 + 2bdn^8 + 2afn^{10} + 2ben^{10} + 2cdn^{10}$ &c. Unde loco propositæ æquationis $y^2 - m^2 - n^2 = 0$ prodibit hæc alia $a^2 - m^2 + 2abn^2 - n^2 + b^2n^4 + 2acn^4 + 2adn^6$

$2adn^6 + 2bcn^6 + 2aen^8 + c^2n^8 + 2bdn^8, + 2afn^{10} + 2ben^{10} + 2cdn^{10}$ &c.

Ponantur in hac æquatione termini omnes, distinguendi litterâ n, æquales zero, sive nihilo, eritque primò $a^2 - m^2 = o$, hoc est $a^2 = m^2$, sive etiam $a = m$; secundò $2ab - 1 = o$, hoc est $2mb = 1$, atque adeo $b = \frac{1}{2m}$; tertiò $b^2 + 2ac = o$, hoc est $2mc = -\frac{1}{4m^2}$, adeoque $c = -\frac{1}{8m^3}$; quartò $2ad + 2bc = o$, hoc est $2md = \frac{1}{8m^4}$, ac proinde $d = \frac{1}{16m^5}$; quintò $2ae + c^2 + 2bd = o$, hoc est $2me = -\frac{5}{64m^6}$, & consequenter $e = -\frac{5}{128m^7}$; atque ita deinceps. Unde series assumpta pro valore incognitæ y mutabitur in hanc aliam $m + \frac{y^2}{2m} - \frac{y^4}{8m^3} + \frac{y^6}{16m^5} - \frac{5y^8}{128m^7}$ &c.: proindeque, quum propter sublatum secundum terminum sit $x = y + m$,

$+ m$, fiet $x = 2m + \frac{y^2}{2m} - \frac{y^4}{8m^3} + \frac{y^6}{16m^5}$
$- \frac{5y^8}{128m^7}$ &c.

Quod si resolvenda proponatur æquatio litteralis secundi gradus $x^2 - 2mx + n^2 = 0$, in qua ultimus terminus afficitur signo $+$; hoc casu necessariò in terminis assumendæ seriei poni debent potestates litteræ n, quum si utique ponerentur in iis potestates litteræ m, primus seriei terminus, omnesq; adeo alii orirentur imaginarii. Unde propositæ æquationis resolutio non aliter beneficio serierum infinitarum potest obtineri, quàm tollendo ex eâ secundum terminum. Itaque tunc demum in terminis seriei poni possunt indistinctè potestates, tum litteræ m, cùm litteræ n, quotiescumque ultimus æquationis terminus afficitur signo —. Nec silentio præteribimus, quod sicuti tollendus est secundus terminus ex æquatione, quum potestates litteræ n ponuntur in terminis seriei; ita si secundus ille terminus reperiatur affectus signo $+$, & adhibitis potestatibus litteræ m, nolit analysta eum terminum tollere, primus seriei terminus assumi debeat affectus signo —.

Istæ

Iſtæ eædem difficultates, quæ occurrunt in reſolvendis æquationibus litteralibus ſecundi gradus per ſeries infinitas, quandoque ſeſe offerunt etiam in æquationibus altioris gradus. Unde magnâ opus eſt ſolertiâ, quum radix alicujus æquationis per ſeriem infinitam exprimi debet. Cæterùm, quum reſolutio confici poteſt, quæcumque ex litteris æquationis aſſumatur pro eâ, quæ diſtingui debet terminos ſeriei, præſtat illam ſemper eligere, quæ eſt omnium minima. Sic enim ſeries erit convergens, ejuſque termini fient ſemper minores, ac minores: qua ratione ad verum valorem incognitæ iſtius citiùs appropinquabitur, quum ſatis ſit primos ſeriei terminos in unum colligere.

Hæc methodus reſolvendi æquationes per ſeries infinitas, uſum habet inſignem in æquationibus, quæ relationem exprimunt inter duas quantitates incognitas. Neque enim in hiſce æquationibus poteſt unius incognitæ valor per limites inveniri, quia etſi litteris, quantitates cognitas deſignantibus, numeri ſubſtituantur, adhuc tamen duæ ſuperſunt litteræ, quæ duas illas quantitates incognitas exprimunt. Itaque ſi valor

unius

unius incognitæ per approximationem desideretur, necessariò valor ille per seriem infinitorum numero terminorum exprimi debet: quo casu præstat seriei terminos per incognitam alteram à se mutuò distinguere.

Nescio autem, àn operæ pretium sit hìc adnotare, nonnulla adesse problemata, in quibus relatio, quam habet una quantitas ad aliam, non aliter algebraicè definiri potest, quàm per æquationem infinitam. Ut si quæratur, exempli causâ, relatio, quam habet quilibet arcus circuli ad suam tangentem, & vocetur x arcus, y tangens, & a circuli radius, fiet æquatio $x = y - \frac{y^3}{3a^2} + \frac{y^5}{5a^4} - \frac{y^7}{7a^6}$ &c. Pariterque si scire cupiam relationem, quam quilibet arcus circuli habet ad suum sinum, iisdemque positis vocetur z sinus arcui correspondens; relationem illam non aliter cognoscere potero, quàm per æquationem istam infinitam $x = z + \frac{z^3}{6a^2} + \frac{3z^5}{40a^4} + \frac{5z^7}{112a^6} + \frac{35z^9}{1152a^8}$ &c.

Quum valor unius incognitæ exprimi-

tur

tur per seriem infinitam, cujus termini incognitâ aliâ distinguuntur à se mutuò, potest vicissim valor alterius hujus incognitæ designari per aliam seriem infinitam, cujus terminos distinguat à se invicem incognita prior. Sic in istâ æquatione $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4$ &c. valor incognitæ x designatur per seriem infinitam, cujus termini distinguuntur incognitâ y; sed alia potest infinita series inveniri, cujus terminos distinguat incognita x, & quæ sit valor incognitæ y. Invenitur autem hæc alia series eadem omnino methodo, qua radix cujuscumque æquationis finitæ per seriem infinitam designatur. Et alterius hujus seriei inventio illud est, quod serierum regressum appellant Recentiores.

Dabimus hujus serierum regressus duo exempla generalia, quæ in casibus specialibus possunt velut canones adhiberi. Itaque si fuerit primò $z = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$ &c., erit vicissim $y = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a^3}z^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5}z^3 + \frac{5abc - 5b^3 - a^2d}{a^7}z^4$

$$+\frac{3a^2c^2 - 21ab^2c + 6a^2bd - 14b^4 - a^3e}{a^9}z^5$$

&c. Et secundò si fuerit $z = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + ey^9$ &c., erit regressus hujus seriei $y = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a^4}z^3 + \frac{3b^2 - ac}{a^7}z^5 + \frac{8abc - a^2d - 12b^3}{a^{10}}z^7 + \frac{55b^4 - 55ab^2c + 10a^2bd + 5a^2c^2 - a^3e}{a^{13}}z^9$ &c. Hinc si proponatur æquatio specialis $z = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c., per canonem primum erit $y = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4$ &c. Et similiter si æquatio specialis fuerit $z = y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5 + \frac{5}{112}y^7$ &c., erit per canonem secundum $y = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7$ &c.

V.

De radicibus purarum æquationum per approximationem inveniendis.

Quum æquationes, quæ resolvendæ proponuntur, sunt puræ, omnibusque terminis intermediis carent, eò res redit, ut ex puris potestatibus radices extrahantur, quæ siquidem inveniri nequeunt exactè, haberi poterunt per approximationem, vel per fractiones decimales, vel etiã ope logarithmorum. Sed quoniam Vir Clarissimus Edmundus Hallejus, Geometriæ Professor Savilianus, occasione nonnullarum formularum, quas protulit Dominus de Lagney, Mathematicus Parisiensis, pro extrahendâ radice cubicâ, incidit in formularum methodum quandam generalem pro quavis potastate satis concinnam; visum est methodo istâ huic secundo nostræ Algebræ libro coronidem imponere, utpote quæ hujuscemodi nobis exhibet formulas ad verum appropinquantes, ut nec logarithmorum artificio, ne fractionibus decimalibus tam facilè cedant.

Primò itaque afferemus formulas, quas pro-

protulit Dominus de Lagney pro extrahendâ radice cubicâ : nimirum, quod si a^3 sit maximus cubus, qui continetur in numero proposito, & $2b$ sit id, quod remanet, cubo illo subducto, radix cubica totius quantitatis $\overline{a^3 + 2b}$ sit inter $a + \frac{2ab}{3a^3 + 2b}$, & $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{2b}{3a}}$: adeo, ut una formularum sit omnino rationalis, altera partim rationalis, partim radicalis. Ex his autem formulis aliquantò propiùs ad scopum collimat posterior, quæ peccat in excessu, quàm prior, quæ peccat in defectu : licèt ob rationalitatem in praxi ista sit longè facilior, ac expedita, quàm illa.

Utramque harum formularum ex ipsâ cubi genesi mirè deduxit Hallejus. Posito enim, quod $a + x$ sit radix cubica totius quantitatis $a^3 + 2b$, erit $a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 = a^3 + 2b$, hoc est $3a^2x + 3ax^2 + x^3 = 2b$. Et quoniam a^3 ex hypothesi est maximus cubus, qui continetur in $a^3 + 2b$, erit x multò minor, quàm a : proindeque in æquatione $3a^2x + 3ax^2 + x^3 = 2b$ respectu ipsius $3a^2x$ negligi potest, non modò terminus x^3, ve-

rùm etiam terminus $3ax^2$. Jam autem neglecto utroque iſtorum terminorum, habetur $3a^2x = 2b$, hoc eſt $x = \frac{2b}{3a^2}$; neglecto verò dumtaxat termino x^3 habetur $3a^2x + 3ax^2 = 2b$, hoc eſt $x = \frac{2b}{3a^2 + 3ax}$. Itaque, ſi in denominatore hujus fractionis loco x ponatur alter ille valor, fiet $x = \frac{2ab}{3a^3 + 2b}$; adeoque radix cubica quæſita, deſignata per $a + x$, erit $a + \frac{2ab}{3a^3 + 2b}$.

Ex eodem fonte derivatur quoque formula altera partim rationalis, partim irrationalis. Iiſdem namque poſitis, invenietur, ut antea, $3a^2x + 3ax^2 + x^3 = 2b$: proindeque neglecto, ob parvitatem, termino x^3, erit $3a^2x + 3ax^2 = 2b$, hoc eſt $x^2 + ax = \frac{2b}{3a}$. Quare addito ad utramque partem hujus æquationis quadrato, quod fit ex ſemiſſe ipſius a, & ex-

extractâ hinc inde quadratâ radice, invenietur $x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{2b}{3a}}$. Unde radix cubica ejusdem quantitatis $a^3 + 2b$, designata per $a + x$, erit $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{2b}{3a}}$, quæ quidem propiùs ad scopum collimabit, quum in hac operatione dumtaxat terminus x^3 negligatur.

Jam eodem hoc artificio exhibuit idem Hallejus binas formulas pro unaquaque potestate. Ita si de quadratâ radice agatur, ponaturque a^2 esse maximum quadratum, quod continetur in numero proposito, & $2b$ id, quod remanet, quadrato illo subducto, erit quadrata radix totius quantitatis $a^2 + 2b$ inter $a + \frac{2ab}{2a^2 + b}$, & $\sqrt{a^2 + 2b}$. Posito enim, quod $a + x$ sit radix quadrata quæsita, erit $a^2 + 2ax + x^2 = a^2 + 2b$, hoc est $2ax + x^2 = 2b$: proindeque neglecto ob parvitatem termino x^2, fiet $2ax = 2b$, hoc est $x = \frac{b}{a}$. Jam verò si in æquatione illâ nul-

nullus terminus negligatur, habetur $x = \frac{2b}{2a + x}$. Itaque, si in denominatore hujus fractionis loco x ponatur alter ille valor, fiet $x = \frac{2ab}{2a^2 + b}$; atque adeò radix quadrata quæsita, designata per $a + x$, erit $a + \frac{2ab}{2a^2 + b}$.

Quantum ad alteram formulam ejusdem quadratæ radicis, derivatur ea ex resolutione æquationis inventæ $2ax + x^2 = 2b$. Si enim ad ejus utramque partem apponatur a^2, fiet $a^2 + 2ax + x^2 = a^2 + 2b$; quare extractâ hinc inde quadratâ radice, invenietur $a + x = \sqrt{a^2 + 2b}$. Unde patet, alteram istam formulam non modò respectu prioris aliquantò propiùs ad scopum collimare, verùm etiam quæsitæ radicis verum valorem impossibilem continere; quandoquidem in ejus inventione nullus terminus negligitur: id, quod exinde quoq; liquet, quia $\sqrt{a^2 + 2b}$ non est aliud, quàm quadrata radix propositæ quantitatis $a^2 + 2b$.

Si-

Similiter si agatur de radice quadrato-quadratâ, ponaturque a^4 esse maximum quadrato-quadratum, quod continetur in numero proposito, & $2b$ id, quod relinquitur per illius quadrato-quadrati subductionem; erit radix quadrato-quadrata totius quantitatis $\overline{a^4 + 2b}$ inter $a + \frac{2ab}{4a^4 + 3b}$, & $-\frac{2}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}a^2 + \frac{2b}{6a^2}}$. Posito enim, quod $a + x$ sit quæsita radix quadrato-quadrata, erit $a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4 = a^4 + 2b$, hoc est $4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4 = 2b$: proindeque neglectis tribus terminis $6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$ ob suam parvitatem, fiet $4a^3x = 2b$, hoc est $x = \frac{b}{2a^3}$. Jam verò, si negliguntur duo postremi termini dumtaxat, habetur $4a^3x + 6a^2x^2 = 2b$, hoc est $x = \frac{2b}{4a^3 + 6a^2x}$. Itaque si in denominatore hujus fractionis ponatur loco x alter ille valor, fiet $x = \frac{2ab}{4a^4 + 3b}$; adeoque radix qua-

quadrato-quadrata, designata per $a + x$, erit $a + \frac{2ab}{4a^4 + 3b}$.

Et quoniam habetur $4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4 = 2b$, neglectis rursus duobus terminis $4ax^3 + x^4$, remanebit $4a^3x + 6a^2x^2 = 2b$, adeoque divisâ utraque parte æquationis per $6a^2$, fiet $\frac{2}{3}ax + x^2 = \frac{2b}{6a^2}$. Unde si ad hujus utramque partem addatur $\frac{1}{9}a^2$, & deinde utrinque quadrata radix extrahatur, habebitur $\frac{1}{3}a + x = \sqrt{\frac{1}{9}a^2 + \frac{2b}{6a^2}}$: proindeque radix quadrato-quadrata, designata per $a + x$, erit $\frac{2}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}a^2 + \frac{2b}{6a^2}}$; quæ quidem propiùs ad verum accedet, quàm formula prior rationalis; quandoquidem in ejus inventione duo tantùm termini negliguntur.

Iisdem vestigiis insistentes inveniemus, quod

quod si a^5 sit maximus quadrato-cubus, qui continetur in quantitate propositâ, & $2b$ sit id, quod remanet post illius quadrato cubi subductionem; radix totius quantitatis $\overline{a^5 + 2b}$ sit inter $a + \frac{2ab}{5a^5 + 4b}$, & $\frac{3}{4}a + \sqrt{\frac{1}{16}a^2 + \frac{2b}{10a^3}}$. Eademque ratione pergere licebit in infinitum, & pro unaquaque altiorum potestatum binas semper formulas cudere, unam omninò rationalem, quæ peccet in defectu, alteram partim rationalem, partim radicalem, quæ peccet in excessu, & aliquãtò propiùs collimet ad verum. Istæ autem formulæ eo ordine, quo ad suas potestates referuntur, ita se habent, si utique fuerit $a^m + 2b$ quantitas proposita, & a^m sit maxima potestas ejus ordinis, de quo agitur, quæ in quantitate illâ continetur.

$$a+\frac{2ab}{2a^2+1b} \qquad \frac{0}{1}a+\sqrt{\frac{1}{1}a^2+\frac{2b}{1a^0}}$$

$$a+\frac{2ab}{3a^3+2b} \qquad \frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{2b}{3a^1}}$$

$$a+\frac{2ab}{4a^4+3b} \qquad \frac{2}{3}a+\sqrt{\frac{1}{9}a^2+\frac{2b}{6a^2}}$$

$$a+\frac{2ab}{5a^5+4b} \qquad \frac{3}{4}a+\sqrt{\frac{1}{16}a^2+\frac{2b}{10a^3}}$$

$$a+\frac{2ab}{6a^6+5b} \qquad \frac{4}{5}a+\sqrt{\frac{1}{25}a^2+\frac{2b}{15a^4}}$$

Unde liquet, eas miro quidem ordine progredi in infinitum, neque adeo necesse sit, tradito artificio singulas invenire. Nam quantùm ad formulas omninò rationales, eæ duabus partibus constant, quarum una est radix maximæ potestatis, quæ in quantitate propositâ continetur; altera est fractio, cujus numerator est eadem radix ducta in reliquam partem ejusdem quantitatis; denominator verò est

est ipsa maxima potestas toties sumpta, quotus est ejus exponens, unà cum dimidio dictæ reliquæ partis toties etiam accepto, quotus est idem exponens, unitate minutus.

Quantum verò ad formulas partim rationales, partim radicales, earum constitutio hæc est: nempe primò pars cujusque rationalis est quantitas, quæ ad radicem maximæ potestatis eam servat rationem, quam habet ejus exponens, duplici unitate minutus, ad eundem exponentem, unâ tantùm unitate multatum. Et secundò pars radicalis est quadrata radix, extrahenda ex binomio, cujus unus terminus est quadratum, quod fit ex eâ parte radicis maximæ potestatis, quam designat ejus exponens, unitate minutus; terminus verò alter est fractio, cujus numerator est pars reliqua propositæ quantitatis, denominator verò est radix maximæ potestatis ad potestatem aliâ duplici dimensione minorem evecta, & toties sumpta, quotus est numerus, qui oritur ex collectione continuâ numerorum naturalium ab unitate usque ad exponentem potestatis, de qua agitur, exclusivè.

Cæterùm si quantitas proposita fuerit

a^m

$a^m - 2b$, ita ut a^m ſit poteſtas non quidem proximè minor, ſed proximè major ejus ordinis, de quo agitur; eo caſu, ut illæ formulæ exhibere poſſint radicem quæſitam, neceſſe eſt in iis mutare ſigna terminis omnibus, ubi quantitas b reperitur. Qua ratione radix cubica quantitatis $a^3 - 2b$ erit inter $a - \frac{2b}{3a^3 - 2b}$, & $\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{2b}{3a}}$. Præſtat autem quandoque, in eliciendis radicibus ex poteſtatibus puris, uti potiùs formulis, quæ referuntur ad $a^m - 2b$, quàm iis, quæ pertinent ad $a^m\ 2b$: nimirum ſi ad quantitatem propoſitam magis accedat poteſtas proximè major, quàm poteſtas proximè minor ejus ordinis, de quo agitur.

FINIS LIBRI SECUNDI.

Er-

Errata graviora, quæ in hoc ſecundo irrepſerunt libro, ſic corrigat Lector Benevolus.

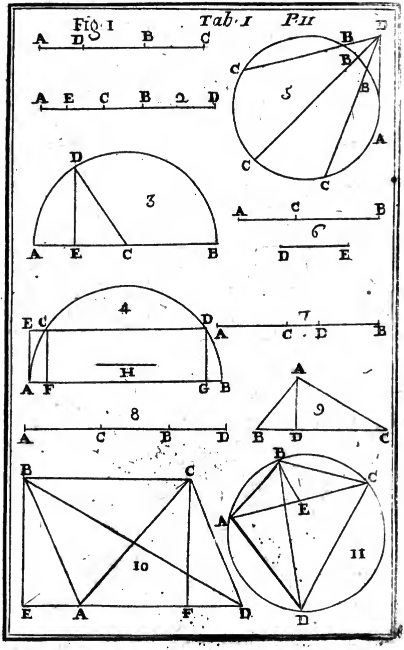
PAg. 18.l.19. pro c lege b. Pag. 22. l. 4. pro AB lege AC. Pag.ead.l.16.pro CB lege CD. Pag.23. l. 6. pro $a - b$ lege $b - a$. Pag.26.l.14. pro x lege y.Pag.ead. l.15.pro $a - y$ lege $a - x$.Pag.62. l. 22. pro AB lege AD.Pag.67.l.17.dele x^2.Pag. 79.l.4.pro GK lege CK.Pag.89. l. 11. pro $\frac{2bmn + cnn - cm^2}{m + n}$ lege $\frac{2bmn + cn^2 - cmn}{m + n}$. Pag.101.l.4.pro AB lege AF.Pag.174.l.1. pro *majorem* lege *minorem*. Pag.175.l.12. pro *binario* lege *ternario*. Pag. 197. l.19. pro $- a^2bc$ lege $+ a^2bc$. Pag.212. l. 14. pro $- 49$ lege $- 61$. Pag. ead. l.23. pro $- 3x$ lege $- 4x$. Pag.242. l.25.pro b^2d l.b^2a. Pag.253. l. 7. poſt *componi* addatur *poſſe*. Pag. 272. l.8.poſt cx^4.addatur dx^4. Pag.282.l.17. pro $am^3 = 27$ lege $am^3 = 54$.Pag.ead.l.22.pro 27. lege 54.Pag.285. l.16.pro a lege n. Pag.296.l.9.pro x^2 lege y^2. Pag. 317. l. 8. pro $- 3q$ lege $- 2q$. Pag.330.pro $- 3a^2x^2$ lege $- 3a^2x$. Pag. 337.l.16. pro $- q$ lege $- 2q$. Pag.346. l. 24.pro $3yz^3 = z^3$ lege $3yz^2 - z^3$.Pag.355.

l.20.

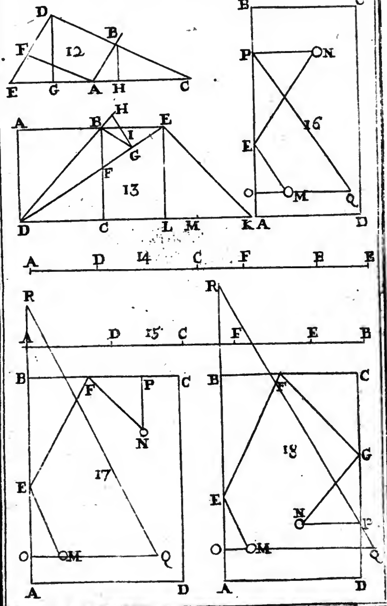
l.20.pro AB lege AD. Pag.403.l.20.& 22. pro y^2 lege x^2.Pag.ead.lin.25.pro $-ab\surd$ lege $-\surd ab$. Pag.405.l.6.pro y^2 lege x^2. Pag.406.l.21.& seqq. pro 361.lege 388. Pag. 413. l. 42. pro $-$ 48. lege $+$ 48.

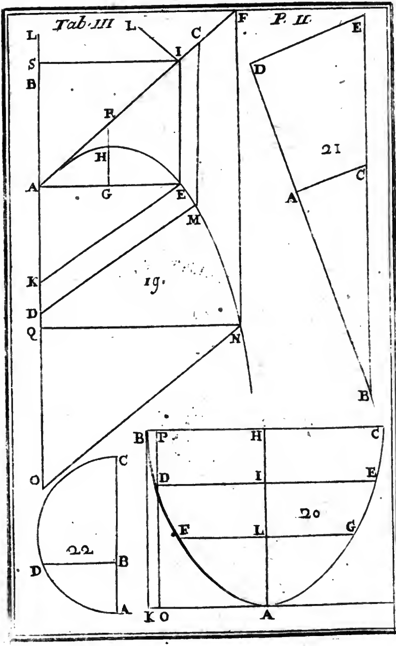
MONITUM.

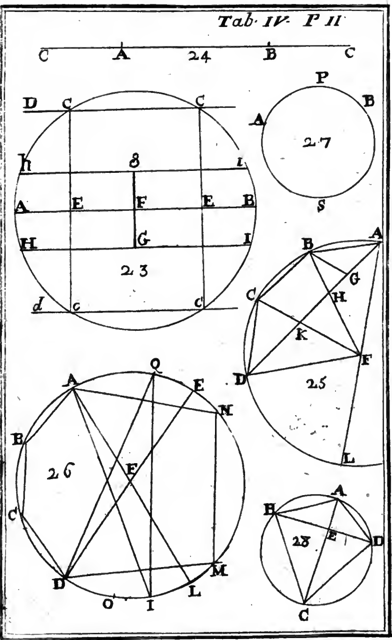
Pag.321, ubi radix realis æquationis $x^3 + 3px - 2q = 0$ invenienda proponitur, fingendo $x = y - z$, instituta est æqualitas inter $z^3 - y^3$, & $2q$, quum tamen instituenda erat inter $z^3 - y^3$, & $-2q$. Hinc verò factum, ut totus qui sequitur, calculus sit erroneus, qui tamen corrigetur, si termini omnes, in quibus reperitur $2q$, contrariis signis afficiantur.


Fig. 1
Tab. I
P. II
3
4
5
6
7
8
9
10
11

Tab. II. P. II.




Tab. III
P. II.
19.
20
21
22
L
S
B
R
H
A
G
E
M
K
D
Q
N
O
I
C
F
P


Tab. IV. F II
C A 24 B C
D C C
h 8 i
A E F E B
H G I
23
d c c
P B A 27 S
B A G C H K F D 25 L
Q A E N B 26 F C D M O I L
A B E D 28 C